

# Geometría infinitesimal de esquemas formales

Marta Pérez Rodríguez

DEPARTAMENTO DE ÁLXEBRA, FACULTADE DE MATEMÁTICAS, UNI-  
VERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA, E-15771 SANTIAGO DE COM-  
POSTELA, SPAIN

*E-mail address:* `martapr@usc.es`

Trabajo realizado dentro del proyecto (“Nuevos métodos en cohomología de esquemas”) MCyT BFM2001-3241, complementado con la ayuda de la Xunta de Galicia PGDIT 01PX120701PR.

# Índice

Introducción	5
Contenidos	8
Agradecimientos	14
CAPÍTULO 1. Esquemas formales	15
1.1. La categoría de esquemas formales localmente noetherianos	15
1.2. Propiedades de morfismos de esquemas formales	26
1.3. Condiciones de finitud de morfismos de esquemas formales	33
1.4. Morfismos planos y morfismos de compleción	40
CAPÍTULO 2. Condiciones infinitesimales de morfismos de esquemas formales	49
2.1. El Módulo de diferenciales	49
2.2. Definiciones de las condiciones infinitesimales	66
2.3. El Módulo de diferenciales y las condiciones infinitesimales	78
CAPÍTULO 3. Caracterización de las condiciones infinitesimales	87
3.1. Morfismos no ramificados	87
3.2. Morfismos lisos	92
3.3. Morfismos étales	102
3.4. Propiedades especiales de los morfismos étales	104
3.5. Teoremas de estructura para las condiciones infinitesimales	110
CAPÍTULO 4. Teoría básica de deformación de esquemas formales lisos	113
4.1. Levantamiento de morfismos	113
4.2. Levantamiento de esquemas formales lisos	116
CAPÍTULO 5. Teorema de descomposición	123
5.1. El complejo de De Rham	123
5.2. El morfismo de Frobenius y el isomorfismo de Cartier	128
5.3. Teorema de descomposición	140
Bibliografía	151



## Introducción

El nacimiento de la teoría de esquemas a finales de la década de los 50 marca el inicio de la Geometría Algebraica moderna. Los esquemas surgen como una generalización natural de las variedades al permitir que el haz estructural posea elementos nilpotentes. Así, un esquema nos dará información de un entorno infinitesimal de una subvariedad en la variedad ambiente. En un nivel superior de abstracción se sitúan los esquemas formales. Coloquialmente, un esquema formal conlleva la información de todos los entornos infinitesimales de una subvariedad en la variedad ambiente.

Los orígenes de los esquemas formales se remontan al año 1951, cuando en “Theory and applications of holomorphic functions on algebraic varieties over arbitrary ground fields” [Z] Zariski utiliza la teoría de funciones holomorfas (en su terminología) para la prueba del Teorema de conexión. Éstas son el análogo de las funciones holomorfas en un entorno de una subvariedad analítica. Grothendieck extiende esta teoría y define los esquemas formales, que permiten estudiar simultáneamente todos los encajes de un cerrado en un esquema. La geometría formal se presenta como un marco adecuado para resolver ciertas cuestiones relativas a esquemas. En la exposición del año 1959 en el Seminario Bourbaki, “Géométrie formelle et géométrie algébrique” [G], Grothendieck realiza un estudio análogo al hecho por Serre sobre la comparación entre la geometría algebraica y la geometría analítica (GAGA). Uno de los resultados importantes de la exposición de Grothendieck es el teorema de comparación entre la cohomología algebraica y la cohomología formal para morfismos propios de esquemas formales. Como consecuencia se obtiene el teorema de las funciones formales, que a su vez proporciona una factorización de Stein para un morfismo propio de esquemas y, por lo tanto, se tiene una generalización del teorema de conexión de Zariski. Entre las consecuencias del Teorema de comparación se pueden citar una demostración cohomológica del Teorema principal de Zariski y los teoremas de Lefschetz para el grupo de Picard y el grupo fundamental (*cf.* [SGA 2]). Otro de los problemas que Grothendieck señala es la algebrización de esquemas formales. El problema podemos enunciarlo brevemente de la siguiente forma, ¿cuándo un morfismo de esquemas formales  $\mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$  es la completación de un morfismo de esquemas  $X \xrightarrow{f} Y$  a lo largo de subesquemas cerrados  $Y' \subset Y$  y  $X' = f^{-1}(Y') \subset X$ ? Bajo ciertas hipótesis, en [G] se resuelve el problema para  $\mathfrak{X}$  un  $\mathfrak{Y}$ -esquema formal propio.

Usando geometría formal, Deligne, en sus exposiciones en Harvard del año 1969, e independientemente Hartshorne en [H2], definen la cohomología de De Rham para un subesquema cerrado  $X$  de un esquema liso  $P$  sobre un cuerpo de característica 0 como la hipercohomología de la compleción formal  $\widehat{\Omega}_P^\bullet$  del complejo de De Rham de  $P$  a lo largo de  $X$ .

A pesar del notable papel jugado por los esquemas formales en el desarrollo de la geometría algebraica, su estudio se redujo considerablemente en las décadas de los 70 y los 80 del siglo pasado pese a notables excepciones como los trabajos de Artin, Hartshorne, Hironaka, Faltings y otros.

Recientemente ha resurgido el interés por los esquemas formales. Por una parte, Raynaud, con la ayuda de Bosch y Lütkebohmert han desarrollado una teoría algebraica de espacios analíticos rígidos empleando como base la categoría de esquemas formales. Por otra parte Strickland ha señalado la importancia de los esquemas formales en el contexto de la homotopía estable.

Frente a esta amplitud de aplicaciones y conexiones con otras ramas de la matemática, la teoría general de los esquemas formales ha sido escasamente explorada. En particular, muchos de los trabajos, incluidos los Elementos de Geometría Algebraica, imponen la hipótesis ádica sobre los morfismos de esquemas formales. En este caso, la base es un esquema formal pero las fibras son esquemas algebraicos (usuales) sobre un cuerpo, de modo que estamos en un contexto de “esquemas relativos”. Sin embargo el morfismo  $\mathrm{Spf}(A[[X]]) \rightarrow \mathrm{Spf}(A)$  no pertenece a esta clase de ejemplos. La naturalidad de este ejemplo hace necesario estudiar morfismos de esquemas formales con condiciones de finitud que no incluyan la hipótesis ádica. Un ejemplo significativo de esta situación es el esquema formal  $P/X$  que se emplea para calcular la cohomología de De Rham cuando  $X$  es singular. También en el contexto de la teoría de residuos surgen morfismos de esquemas formales que no son ádicos. El caso más simple es el de una variedad sobre un cuerpo perfecto. El residuo en este contexto se calcula sobre un punto cerrado y requiere apelar a la compleción del anillo local correspondiente al punto. Desde un punto de vista geométrico esto supone completar la variedad en el cerrado dado por el punto y esto proporciona un esquema formal que no es ádico sobre el cuerpo base pero que sí verifica la condición de ser un cociente de un anillo de series formales. Este tipo de consideraciones así como la fórmula del residuo relativo (clave en el cálculo de residuos multidimensionales) nos llevan a considerar la situación siguiente: un morfismo de esquemas formales  $X_{/X'} \xrightarrow{\widehat{f}} Y_{/Y'}$  obtenido completando un morfismo  $X \xrightarrow{f} Y$  de tipo finito de esquemas noetherianos, respecto a dos subesquemas cerrados  $Y' \subset Y$  y  $X' \subset X$  de modo que  $f(X') \subset Y'$ . El morfismo  $\widehat{f}$  es de pseudo tipo finito, pero sólo será ádico cuando  $X'$  es precisamente  $f^{-1}(Y')$ , un caso interesante, aunque como hemos visto, insuficiente para las aplicaciones.

En este contexto Alonso, Jeremías y Lipman han desarrollado una teoría de dualidad para morfismos pseudo propios de esquemas formales noetherianos, que generaliza la dualidad clásica de Grothendieck. El enfoque de estos autores es funtorial empleando técnicas de teoremas de representabilidad lo que evita los cálculos complicados del enfoque clásico. Sin embargo, a la hora de las descripciones explícitas sería útil una caracterización de los morfismos lisos en términos de una noción adecuada de diferenciales.

En [Y] Yekutieli construye explícitamente el complejo residual de Grothendieck para un esquema de tipo finito sobre un esquema regular. En su construcción usa un determinado tipo de morfismos de esquemas formales lisos y la dualidad de Grothendieck para esquemas formales.

La construcción de Yekutieli es un caso particular del estudio reciente realizado por Lipman, Nayak y Sastry en [LNS]. En ese trabajo se da una construcción canónica y pseudofunctorial de los complejos de Cousin en esquemas formales.

Como consecuencia de lo anterior se hace necesario un estudio de la condición de lisitud para morfismos no necesariamente ádicos de esquemas formales que incluyan los ejemplos que proceden de la teoría de De Rham y de la teoría de residuos. En esta memoria abordamos de forma sistemática este estudio. Tratamos primero las condiciones de levantamiento (formalmente liso, formalmente no ramificado, formalmente étale) en el contexto de esquemas formales e introducimos las nociones de morfismo liso, no ramificado y étale si el morfismo es además de pseudo tipo finito. Esta condición permite la caracterización de las condiciones infinitesimales en términos diferenciales incluyendo las versiones usuales de los criterios jacobianos, y hace posible el desarrollo de una teoría de la deformación formal para morfismos lisos de esquemas formales.

Una observación sobre la terminología. Hemos optado por denominar liso, no ramificado y étale a las condiciones en el caso de un morfismo de pseudo tipo finito, añadiendo el adjetivo “ádico” cuando esta hipótesis está presente. No hubiera sido adecuado optar por pseudo liso para un morfismo formalmente liso y de pseudo tipo finito dado que el morfismo de esquemas usuales subyacentes puede no ser liso (*cf.* Ejemplo 3.2.3) (como es el caso de la condición análoga en los morfismos de pseudo tipo finito o pseudo propios). Por otra parte, pensamos que los morfismos lisos jugarán un papel más importante que los lisos ádicos cuya estructura, como veremos, es más simple. Obtenemos una caracterización local de los morfismos lisos en términos de compleciones y morfismos lisos ádicos que entendemos que esclarece completamente la estructura de los morfismos lisos de esquemas formales.

La memoria se completa con aplicaciones de la teoría desarrollada. En concreto, estudiamos la cohomología de De Rham en característica positiva. Hemos obtenido el análogo del teorema de descomposición para un esquema formal liso sobre un cuerpo de característica positiva lo que nos hace albergar

esperanza de que nuestros métodos permitan una nueva vía para el estudio de la cohomología de las variedades con singularidades.

### Contenidos

En la primera sección del Capítulo 1 hacemos un compendio de la teoría básica de esquemas formales siguiendo las referencias habituales, principalmente [EGA I], y se proporcionan ejemplos sencillos como los espacios formales afines, los discos formales y la compleción de un esquema. Se fijan, además, algunas notaciones que facilitarán la lectura del trabajo. En una gran parte de la categoría de esquemas formales, en la que se incluyen la categoría de esquemas afines y la categoría de esquemas formales localmente noetherianos, un esquema formal  $\mathfrak{X}$  se puede expresar como límite de un sistema directo de esquemas (usuales),  $\mathfrak{X} = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} X_n$ , y un morfismo  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  se

puede escribir como límite de un sistema directo de morfismos de esquemas,  $f = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} (X_n \xrightarrow{f_n} Y_n)$ .

Tras esta parte introductoria, se inicia la exposición de la materia que ha sido objeto de nuestra investigación. Se introduce la noción de dimensión algebraica de un esquema formal  $\mathfrak{X}$ ,  $\dim(\mathfrak{X})$ , y la comparamos con la dimensión del espacio topológico subyacente,  $\dim_{\text{top}}(\mathfrak{X})$ . Ambas dimensiones no coinciden, es una característica que distingue los esquemas formales de los esquemas usuales. Un esquema formal se puede pensar como un *iceberg*, en el sentido de que tiene una parte visible que se corresponde con el esquema subyacente y una parte oculta, que Grothendieck denominaba informalmente la fibra genérica de un esquema formal y que en el caso de un esquema formal sobre el espectro formal de un anillo de valoración completo constituye un modelo algebraico de los espacios analíticos rígidos  $p$ -ádicos.

La Sección 1.2 comienza recordando el concepto definido por Grothendieck de morfismo ádico de esquemas formales y se dan sus propiedades básicas. Este tipo de morfismos se comportan de modo análogo a los morfismos de esquemas usuales. Sin embargo, es razonable considerar morfismos más generales, por ejemplo, el morfismo de compleción  $X_{/X'} \rightarrow K$  de una variedad  $X$  a lo largo de una subvariedad cerrada  $X' \subset X$ . Por ello no centraremos nuestra atención en los morfismos ádicos, sino que servirán para mostrar la distinción entre determinadas propiedades de un morfismo según sea ádico o no. A continuación, definimos la fibra de un morfismo  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  de esquemas formales en un punto  $x$ ,  $f^{-1}(f(x))$ , que en general es un esquema formal y que en el caso particular de que  $f$  sea ádico es un esquema. En el Capítulo 3 veremos como las propiedades infinitesimales de un morfismo  $f$  en un punto  $x \in \mathfrak{X}$  esán determinadas en cierto sentido por la fibra  $f^{-1}(f(x))$ . El resto de la sección está dedicada al estudio de diversas propiedades de morfismos de esquemas formales. De especial importancia son los pseudo encajes cerrados, unos morfismos no necesariamente ádicos



que topológicamente son encajes cerrados y que serán claves en la caracterización de los morfismos de compleción y, en consecuencia, en los teoremas de estructura de las condiciones infinitesimales. La sección se completa con el estudio de propiedades de morfismos de esquemas formales tales como los encajes abiertos, los morfismos radicales y los morfismos separados, que emplearemos a lo largo de este trabajo. Todos ellos tienen un comportamiento análogo al de los correspondientes morfismos en la categoría de esquemas.

La siguiente sección (1.3) comienza recordando diversas condiciones de finitud de morfismos de esquemas formales. En la clase de los morfismos ádicos, Grothendieck definió los morfismos de tipo finito y los morfismos finitos y que, de nuevo, se comportan de modo análogo a las propiedades correspondientes en la categoría de esquemas. En la amplia clase de los morfismos no ádicos, Alonso, Jeremías y Lipman, y simultáneamente Yekutieli introdujeron los morfismos de pseudo tipo finito y los morfismos pseudo finitos. Para un morfismo  $f = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} f_n$  estas nociones están caracterizadas

por el carácter de tipo finito y finito, respectivamente, de los morfismos de esquemas  $f_n$  subyacentes. A continuación y en concordancia con la filosofía anterior, proponemos el concepto de morfismo pseudo cuasifinito. Un morfismo  $f$  es pseudo cuasifinito si los morfismos de esquemas subyacentes  $f_n$  son cuasifinitos. En la Sección 3.3 se verá que no todo morfismo pseudo cuasifinito y liso es étale, a diferencia de lo que ocurre en la categoría de esquemas en la que todo morfismo cuasifinito y liso es étale. Este hecho nos obliga a introducir la noción de cuasirevestimiento. Los cuasirevestimientos son un tipo de morfismos que contienen a los morfismos pseudo cuasifinitos y que bajo la hipótesis ádica coinciden con éstos. La sección se completa con una proposición en la que se establecen los sorites de una propiedad  $\mathcal{P}$  de morfismos de esquemas formales, una técnica que facilitará las demostraciones de resultados posteriores.

La última parte del Capítulo 1 comienza con el estudio de los morfismos planos de espacios anillados en el caso particular de la categoría de esquemas formales. Un resultado importante es la Proposición 1.4.7 en la que traduciendo el Criterio local de planitud, se da un criterio que determina la planitud de un morfismo  $f = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}}$  ádico a través de la planitud

de los morfismos de esquemas  $f_n$  subyacentes. En el caso no ádico, no se verifica el resultado análogo. Como se verá en la Sección 3.2 este hecho es el que provoca que la lisitud de un morfismo no ádico, no sea heredada por los morfismos de esquemas subyacentes correspondientes. A continuación se definen los morfismos de compleción, un tipo de morfismos planos que topológicamente son encajes cerrados. Recíprocamente, en la Sección 3.3 se probará que todo pseudo encaje cerrado plano es un morfismo de compleción. Los morfismos de compleción serán esenciales en la descripción de la estructura de los morfismos étales y lisos, uno de los resultados principales de este trabajo.

En la Sección 2.1 se define el par diferencial de un morfismo de esquemas formales y se estudian sus propiedades básicas. En el contexto formal la noción habitual de módulo de diferenciales no es válida ya que en general, y a pesar de imponer hipótesis de finitud, éste no es coherente. Localmente, definimos el par diferencial de un morfismo de esquemas formales  $\mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$ ,  $(\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^1, \widehat{d}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}})$ , como la compleción del par diferencial clásico. Se prueba que el par diferencial es el objeto universal en la categoría de  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -Módulos completos,  $\text{Comp}(\mathfrak{X})$ , del funtor “derivaciones continuas”:

TEOREMA (2.1.22). *Sea  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  un morfismo en Sfn. Entonces dado  $\mathcal{F} \in \text{Comp}(\mathfrak{X})$  se tiene un isomorfismo canónico*

$$\text{Hom}(\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^1, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \text{Dercont}_{\mathfrak{Y}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}, \mathcal{F})$$

En la segunda parte del capítulo y siguiendo la definición de Grothendieck de las condiciones infinitesimales en la categoría de esquemas, se definen las condiciones infinitesimales para un morfismo de esquemas formales y se estudian sus propiedades iniciales. De seguido, y con la intención de utilizar como herramienta el Módulo de diferenciales, nos centramos en el estudio de las condiciones infinitesimales para morfismos de pseudo tipo finito. Entre otros resultados probaremos que siempre se puede reducir el estudio de las condiciones infinitesimales al caso afín y que el carácter liso, no ramificado o étale de un morfismo  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  es estable por compleción de  $f$  a lo largo de dos subesquemas formales cerrados  $\mathfrak{X}' \subset \mathfrak{Y}$  y  $\mathfrak{Y}' \subset \mathfrak{Y}$  tales que  $f(\mathfrak{X}') \subset \mathfrak{Y}'$ . En la Sección 2.3 se relacionan las condiciones infinitesimales con propiedades especiales del par diferencial. Al final de la sección se da una versión del Criterio jacobiano de Zariski para esquemas formales, es decir, la escisión local de la segunda sucesión exacta fundamental.

El siguiente capítulo, el Capítulo 3, constituye la parte central de la memoria y en él se exponen los resultados principales. En la primera parte (Secciones 3.1, 3.2 y 3.3) se realiza un estudio local de las condiciones infinitesimales y se prueban teoremas que relacionan los morfismos no ramificados, lisos y étales en la categoría de esquemas formales con los correspondientes morfismos en la categoría de esquemas usuales. Se ve que en la clase de los morfismos ádicos el comportamiento de las condiciones infinitesimales es completamente paralelo al caso de esquemas y, en cierta medida, está determinado por las propiedades correspondientes de los morfismos de esquemas subyacentes. Por el contrario, se dan contraejemplos que indican que en ausencia de la hipótesis “ádica” el comportamiento no es así. Un resultado importante por su relevancia en la caracterización de los morfismos de compleción es:

COROLARIO (3.1.13). *Dado  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  en Sfn, sean  $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$  y  $\mathcal{K} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$  Ideales de definición tales que  $f^*(\mathcal{K})\mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \subset \mathcal{J}$  y respecto a los cuales  $f =$*

$\varinjlim_{n \in \mathbb{N}} f_n$ . El morfismo  $f$  es un pseudo encaje cerrado si, y sólo si,  $f$  es no

ramificado y  $X_0 \xrightarrow{f_0} Y_0$  es un encaje cerrado.

Por otra parte, se da una factorización local de los morfismos lisos que generaliza a la correspondiente en la categoría de esquemas y que se utilizará en la demostración del teorema de estructura de los morfismos lisos:

PROPOSICIÓN (3.2.9). Sea  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  un morfismo en  $\text{Sfn}$  de pseudo tipo finito. El morfismo  $f$  es liso en  $x \in \mathfrak{X}$  si, y sólo si, existe  $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{X}$  abierto con  $x \in \mathfrak{U}$  tal que  $f|_{\mathfrak{U}}$  se factoriza en

$$\mathfrak{U} \xrightarrow{g} \mathbb{A}_{\mathfrak{Y}}^n \xrightarrow{p} \mathfrak{Y}$$

donde  $g$  es étale,  $p$  es la proyección canónica y  $n = \text{rg}(\widehat{\Omega}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},x}/\mathcal{O}_{\mathfrak{Y},f(x)}}^1)$ .

A continuación se obtiene un criterio matricial de lisitud:

COROLARIO (3.2.13). (Criterio jacobiano para el espacio formal afín y el disco formal afín). Dado  $\mathfrak{Y} = \text{Spf}(A)$  en  $\text{Sfn}_{\text{af}}$  sea  $\mathfrak{X} \subset \mathbb{D}_{\mathbb{A}_{\mathfrak{Y}}}^s$  un subesquema cerrado dado por un Ideal  $\mathcal{I} = I^\Delta$  con  $I = \langle g_1, g_2, \dots, g_k \rangle \subset A\{T_1, \dots, T_r\}[[Z_1, \dots, Z_s]]$ . Son equivalentes:

- (1) El morfismo  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  es liso en  $x$  y  $\dim_x f = r + s - l$ .
- (2) Existe un conjunto  $\{g_1, \dots, g_l\} \subset \{g_1, g_2, \dots, g_k\}$  tal que  $I_x = \langle g_{1,x}, g_{2,x}, \dots, g_{l,x} \rangle$  y  $\text{rg}(\text{Jac}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}(x)) = l$ .

Un corolario de este resultado será esencial en el desarrollo de la teoría de deformación (Capítulo 4), en particular en la prueba del teorema de existencia de levantamientos lisos.

La Sección 3.3 es una fusión de los resultados obtenidos en las dos secciones anteriores. Tal y como habíamos señalado previamente, se obtiene que un cuasirevestimiento liso es un morfismo étale, y recíprocamente. La Sección 3.4 se centra en el estudio de morfismos étales especiales. Se describen los encajes abiertos en la categoría de esquemas formales:

TEOREMA (3.4.3). Sea  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  un morfismo en  $\text{Sfn}$ . Las siguientes condiciones son equivalentes:

- (1)  $f$  es un encaje abierto.
- (2)  $f$  es ádico, plano y, si  $\mathcal{K} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$  un Ideal de definición y  $\mathcal{J} = f^*(\mathcal{K})\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ , el morfismo de esquemas asociado  $X_0 \xrightarrow{f_0} Y_0$  es un encaje abierto.
- (3)  $f$  es étale ádico y radical.
- (4) Existen  $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$  y  $\mathcal{K} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$  Ideales de definición con  $f^*(\mathcal{K})\mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \subset \mathcal{J}$  tales que los morfismos  $X_n \xrightarrow{f_n} Y_n$  son encajes abiertos, para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Además caracterizamos los morfismos de compleción:

TEOREMA (3.4.4). Dado  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  en  $\text{Sfn}$  sean  $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$  y  $\mathcal{K} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$  Ideales de definición tales que  $f^*(\mathcal{K})\mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \subset \mathcal{J}$ . Las siguientes condiciones son equivalentes:

- (1) Existe  $\mathfrak{Y}' \subset \mathfrak{Y}$  un subesquema formal cerrado tal que  $f$  es el morfismo de completión de  $\mathfrak{Y}$  a lo largo de  $\mathfrak{Y}'$  y, por lo tanto,  $\mathfrak{X} = \mathfrak{Y}/_{\mathfrak{Y}'}$ .
- (2) El morfismo  $f$  es un pseudo encaje cerrado plano.
- (3) El morfismo  $f$  es étale y  $X_0 \xrightarrow{f_0} Y_0$  es un encaje cerrado.
- (4) El morfismo  $f$  es un pseudo encaje cerrado liso.

Por último se establece la equivalencia de categorías entre los morfismos de esquemas formales étales ádicos y los morfismos étales entre los esquemas subyacentes correspondientes:

TEOREMA (3.4.5). Sea  $\mathfrak{Y}$  en  $\text{Sfn}$  y  $\mathcal{K} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$  un Ideal de definición respecto al cual  $\mathfrak{Y} = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} Y_n$ . Entonces el funtor

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{Y}\text{-esquemas formales étales ádicos} & \rightarrow & Y_0\text{-esquemas étales} \\ \mathfrak{X} & \rightsquigarrow & \mathfrak{X} \times_{\mathfrak{Y}} Y_0 \end{array}$$

es una equivalencia de categorías.

La Sección 3.5 es una de las partes más importantes de esta memoria, en ella se prueban los teoremas de estructura de las condiciones infinitesimales. La equivalencia de categorías que establece el teorema anterior y la caracterización de los morfismos de completión son los pilares para la descripción de las condiciones infinitesimales en función de las condiciones infinitesimales ádicas. En primer lugar, se prueba que un morfismo no ramificado se factoriza localmente en un pseudo encaje cerrado y en un morfismo no ramificado ádico. Como consecuencia de esto se obtiene que un morfismo étale, localmente, es composición de un morfismo de completión y de un morfismo étale ádico. Finalmente, utilizando la descripción local de los morfismos lisos en función de los morfismos étales se obtiene el siguiente teorema de estructura:

TEOREMA (3.5.3). Sea  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  un morfismo en  $\text{Sfn}$  liso en  $x \in \mathfrak{X}$ . Entonces existe  $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{X}$  abierto con  $x \in \mathfrak{U}$  tal que  $f|_{\mathfrak{U}}$  se factoriza

$$\mathfrak{U} \xrightarrow{\kappa} \mathfrak{X}' \xrightarrow{f'} \mathfrak{Y}$$

donde  $\kappa$  es un morfismo de completión y  $f'$  es un morfismo liso ádico.

En el Capítulo 4 se extiende la teoría de deformación de esquemas respecto a un ideal de cuadrado nulo a la categoría de esquemas formales abordando los dos problemas de levantamiento global básicos: el levantamiento de morfismos sobre un esquema formal liso y el levantamiento de esquemas formales lisos. Los resultados obtenidos en este capítulo serán utilizados en la prueba del teorema de descomposición. En la primera parte se demuestra que existe una obstrucción en un cierto grupo de cohomología de orden uno a la existencia de levantamiento de un morfismo a un “entorno infinitesimal”

sobre un esquema formal liso. A continuación, para  $\mathfrak{Y}_0 \hookrightarrow \mathfrak{Y}$  un encaje cerrado de esquemas formales localmente noetherianos con el mismo espacio topológico subyacente respecto a un ideal de cuadrado nulo y  $\mathfrak{X}_0$  un esquema formal  $\mathfrak{Y}_0$ -liso, se estudia la cuestión de la unicidad de levantamiento liso  $\mathfrak{X} \cong \mathfrak{X}_0 \times_{\mathfrak{Y}_0} \mathfrak{Y}$  de  $\mathfrak{X}_0$  sobre  $\mathfrak{Y}$ . Se demuestra que está determinada por la anulación de un cierto  $\text{Ext}^1$  sobre  $\mathfrak{X}_0$ . La existencia del levantamiento depende de la anulación de un elemento que vive en un cierto grupo de cohomología de orden dos:

TEOREMA (4.2.4). *Sea  $\mathfrak{Y}_0 \hookrightarrow \mathfrak{Y}$  un encaje cerrado en Sfn dado por un Ideal  $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$  de cuadrado nulo y  $\mathfrak{X}_0 \xrightarrow{f_0} \mathfrak{Y}_0$  un morfismo en Sfn liso con  $\mathfrak{X}_0$  un esquema formal separado. Entonces existe  $c_{f_0} \in \text{Ext}^2(\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}_0/\mathfrak{Y}_0}^1, f_0^*\mathcal{I})$  de modo que:*

*$c_{f_0} = 0$  si, y sólo si, existe un levantamiento liso  $\mathfrak{X}$  de  $\mathfrak{X}_0$  sobre  $\mathfrak{Y}$ .*

En particular, cuando  $\mathfrak{X}_0$  es un esquema formal afín el levantamiento existe y es único.

El último capítulo de esta memoria se ocupa del Teorema de descomposición para un esquema formal liso sobre un esquema formal de característica  $p$ . En la primera parte, se define el complejo de De Rham,  $\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^\bullet$ , para un morfismo  $\mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$  de esquemas formales localmente noetherianos y se estudian algunas de sus propiedades básicas. La Sección 5.2 está dedicada a la extensión de técnicas de esquemas de característica  $p$  a la categoría de esquemas formales de característica  $p$  y que son esenciales en la prueba del teorema descomposición. Un hecho clave es que si  $\mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$  es un morfismo de esquemas formales localmente noetherianos con  $\mathfrak{Y}$  de característica  $p$  y  $\mathfrak{X} \xrightarrow{F} \mathfrak{X}'$  es el morfismo de Frobenius relativo de  $\mathfrak{X}$  sobre  $\mathfrak{Y}$ , entonces  $F_*\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^\bullet$  es un complejo de  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}$ -Módulos. Cuando  $\mathfrak{X}$  es liso sobre  $\mathfrak{Y}$  se demuestra que el morfismo de Frobenius relativo es finito y plano y, si  $f$  tiene dimensión constante  $n$  se verifica que  $F_*\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^i$  son  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}$ -Módulos localmente libre de rango  $p^n \cdot \binom{n}{i}$ . Estos resultados son fundamentales en la prueba del isomorfismo de Cartier:

TEOREMA (5.2.18). *Sea  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  un morfismo liso en Sfn con  $\mathfrak{Y}$  de característica  $p$  y  $\mathfrak{X} \xrightarrow{F} \mathfrak{X}'$  el morfismo de Frobenius relativo de  $\mathfrak{X}$  sobre  $\mathfrak{Y}$ . Entonces existe un único isomorfismo de  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}$ -Álgebras graduadas*

$$\bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}'/\mathfrak{Y}}^i \xrightarrow{\gamma} \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathcal{H}^i F_* \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^\bullet$$

*tal que  $\gamma^0$  es el morfismo canónico  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'} \rightarrow F_*\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$  y  $\gamma^1$  viene dado localmente por  $1 \otimes \widehat{d}(a) \rightsquigarrow [a^{p-1}\widehat{d}(a)]$ .*

Finalmente la Sección 5.3 se ocupa de la prueba teorema de descomposición:

TEOREMA (5.3.3). *Sea  $\mathfrak{Y}_0$  un esquema formal en Sfn de característica  $p$  e  $\mathfrak{Y}$  un levantamiento plano de  $\mathfrak{Y}_0$  sobre  $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ . Dado  $\mathfrak{X}_0 \xrightarrow{f_0} \mathfrak{Y}_0$  un morfismo liso en Sfn y  $\mathfrak{X}_0 \xrightarrow{F_0} \mathfrak{X}'_0$  el morfismo de Frobenius relativo de  $\mathfrak{X}_0$  sobre  $\mathfrak{Y}_0$ , si existe  $\mathfrak{X}'$  un levantamiento liso de  $\mathfrak{X}'_0$  sobre  $\mathfrak{Y}$  entonces el complejo de  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'_0}$ -Módulos  $\tau^{<p}(F_{0*}\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}_0/\mathfrak{Y}_0}^\bullet)$  es descomponible en  $\mathbf{D}(\mathfrak{X}'_0)$ .*

En particular, se obtiene que si  $k$  es un cuerpo perfecto de característica  $p$ ,  $Z$  es un esquema (no necesariamente liso) embebible en un  $k$ -esquema liso  $X$  de modo que  $\widehat{X} = X/Z$  admite un levantamiento liso sobre el anillo de los vectores de Witt,  $W_2(k)$ , entonces el complejo  $\tau^{<p}(F_*\widehat{\Omega}_{\widehat{X}/k}^\bullet)$  se descompone, donde  $F$  es el morfismo de Frobenius relativo de  $X/Z$  sobre  $k$  y  $\widehat{\Omega}_{\widehat{X}/k}^\bullet$  es el complejo de De Rham de  $\widehat{X}$  relativo a  $k$ .

Todos los anillos considerados serán conmutativos y unitarios y denotaremos por Sch la categoría de esquemas.

### Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado en el Departamento de Álgebra de la Universidad de Santiago de Compostela bajo la dirección de los profesores Leo Alonso Tarrío y Ana Jeremías López, a los cuales deseo agradecer enormemente la ayuda prestada. Gracias por haberme brindado la oportunidad de aprender junto a vosotros.

Deseo agradecer al Departamento de Álgebra de la Universidad de Santiago su hospitalidad a lo largo de estos años.

También deseo dar las gracias a los compañeros del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Vigo que han facilitado que dispusiera del tiempo necesario para la redacción de la última parte de esta tesis doctoral.

Agradezco a Angeles y a Antonio su colaboración en los trabajos de imprenta.

A mis padres, a mi hermana, a Jose y a todos mis amigos: Ana, Andrea, Isabel, Josiño, Jous, Leo, Natalia, Sonia, ... Gracias por vuestro gran apoyo.

Santiago de Compostela, primavera de 2004

## CAPÍTULO 1

### Esquemas formales

En este capítulo se establecen los conceptos y notaciones de esquemas formales fundamentales para la lectura de esta memoria. En la Sección 1.1 se repasa la teoría básica de esquemas formales ilustrándola con ejemplos. Además se definen dos conceptos de dimensión de un esquema formal. Las Secciones 1.2 y 1.3 se ocupan de las propiedades de morfismos de esquemas formales (topológicas y de finitud). Por otro lado, se introducen nociones esenciales en el desarrollo posterior de este trabajo como los pseudo encajes cerrados, los cuasirevestimientos y la fibra de un morfismo. En la última parte estudiaremos los morfismos planos y se introducen los morfismos de completión, una clase de morfismos planos que topológicamente son encajes cerrados.

#### 1.1. La categoría de esquemas formales localmente noetherianos

En esta sección recordaremos brevemente las definiciones y resultados básicos sobre esquemas formales localmente noetherianos. No se pretende hacer una exposición detallada sino hacer un corto recorrido de la teoría elemental de esquemas formales, a la vez que fijar las notaciones y resultados esenciales que serán utilizados más tarde, para así facilitar la comprensión de este trabajo. Para un estudio más profundo remitimos al lector a [EGA I, §10]. Asimismo, se detallan ejemplos de esquemas formales a los que nos referiremos a lo largo de esta memoria, como son el espacio formal afín y el disco formal. Además, se define la dimensión algebraica de un esquema formal localmente noetheriano.

DEFINICIÓN 1.1.1. Sea  $A$  un anillo  $I$ -ádico<sup>1</sup>. Llamamos *espectro formal de  $A$*  y se escribe  $\mathrm{Spf}(A)$  al espacio topológicamente anillado (cf. [EGA I, (0.4.1.1)]) con espacio topológico subyacente el cerrado  $V(I) \subset \mathrm{Spec}(A)$  y cuyo haz de anillos topológicos es  $\varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{O}_{X_n}$  donde, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{O}_{X_n}$  es el haz estructural de anillos de  $X_n = \mathrm{Spec}(A/I^{n+1})$ .

---

<sup>1</sup>Un anillo topológico  $A$  se dice que es  $I$ -preádico si  $(I^n)_{n \in \mathbb{N}}$  es un sistema fundamental de entornos del 0, y se dice que la topología de  $A$  es  $I$ -ádica. Si además  $A$  es separado y completo para la topología dada para la topología  $I$ -ádica, se dirá que  $A$  es  $I$ -ádico (cf. [EGA I, (0.7.1.9)]). Trivialmente, todo anillo  $A$  es separado y completo para la topología discreta, esto es, la topología dada por cualquier ideal nilpotente de  $A$ . Además, en un cuerpo  $k$  la única topología ádica es la discreta.

Un espacio topológicamente anillado  $(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$  se dice que es un *esquema formal afín* si es isomorfo al espectro formal  $\mathrm{Spf}(A)$  de un anillo  $I$ -ádico  $A$ . Si además  $A$  es noetheriano se dirá que  $\mathfrak{X}$  es un *esquema formal afín noetheriano*. En particular, se tiene que un esquema afín es un esquema formal afín para la topología discreta.

OBSERVACIÓN. Dado un anillo  $A$  admisible (cf. [EGA I, (0.7.1.2)]) en [EGA I, §10.1] se define el espectro formal de  $A$ ,  $\mathrm{Spf}(A)$ , y la noción de esquema formal afín; y, en particular, cuando  $A$  es  $I$ -ádico se dice que  $\mathrm{Spf}(A)$  es un espectro formal afín ádico y que un esquema formal afín  $\mathfrak{X} \cong \mathrm{Spf}(A)$  es ádico. Estas nociones de espectro formal afín ádico y de esquema formal afín ádico coinciden con los conceptos de espectro formal afín y de esquema formal afín, respectivamente, dados en la Definición 1.1.1.

1.1.2. Si  $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$  es un esquema formal afín con  $A$  un anillo  $I$ -ádico, es conocido que:

- (1)  $\Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}) \cong A$  como anillos topológicos [EGA I, (10.1.3)].
- (2) Para cada  $f \in A$ , si llamamos  $\mathfrak{D}(f) = D(f) \cap \mathfrak{X}$ , donde  $D(f) = \mathrm{Spec}(A_f)$  se tiene que  $\{\mathfrak{D}(f)\}_{f \in A}$  es una base de abiertos de  $\mathrm{Spf}(A)$ . Además, el isomorfismo

$$(\mathfrak{D}(f), \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}|_{\mathfrak{D}(f)}) \cong \mathrm{Spf}(A_{\{f\}}) \text{ [EGA I, loc. cit.],}$$

donde  $A_{\{f\}}$  denota el anillo separado y completo de  $A_f$  respecto a la topología  $I_f$ -ádica<sup>2</sup>, muestra que  $\mathfrak{D}(f) = (\mathfrak{D}(f), \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}|_{\mathfrak{D}(f)})$  es un esquema formal afín.

- (3) Para cada  $x \in \mathfrak{X}$ , sea  $\mathfrak{p}$  el ideal primo abierto correspondiente en  $A$ . El *anillo local de  $\mathfrak{X}$  en  $x$*  es<sup>3</sup>:

$$\mathcal{O}_{\mathfrak{X},x} = \varinjlim_{f \notin \mathfrak{p}} \Gamma(\mathfrak{D}(f), \mathcal{O}_{\mathfrak{D}(f)}) = \varinjlim_{f \notin \mathfrak{p}} A_{\{f\}} =: A_{\{\mathfrak{p}\}}$$

Se verifica que  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},x}$  es un anillo noetheriano local con ideal maximal  $\mathfrak{p}\mathcal{O}_{\mathfrak{X},x}$  y su cuerpo residual es  $k(x) = A_{\{\mathfrak{p}\}}/\mathfrak{p}A_{\{\mathfrak{p}\}} = A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$  (cf. [EGA I, (0.7.6.17) y (0.7.6.18)]). En general,  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},x}$  no es un anillo completo para la topología  $I\mathcal{O}_{\mathfrak{X},x}$ -ádica.

EJEMPLO 1.1.3. Sea  $A$  un anillo  $I$ -ádico noetheriano y  $A[\mathbf{T}]$  el anillo de polinomios con coeficientes en  $A$  y en las indeterminadas  $\mathbf{T} = T_1, T_2, \dots, T_r$ .

<sup>2</sup>[EGA I, §0.7.6] Dado  $A$  un anillo  $J$ -ádico y  $S \subset A$  un subconjunto multiplicativo  $A\{S^{-1}\}$  es el anillo separado y completo de  $S^{-1}A$  respecto a la topología  $S^{-1}J$ -ádica. Si  $M$  es un  $A$ -módulo,  $M\{S^{-1}\}$  denota el módulo separado y completo de  $S^{-1}M$  respecto a la topología  $S^{-1}J$ -ádica, esto es,  $M\{S^{-1}\} = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} S^{-1}M/(S^{-1}J)^n M$ . En particular, si  $S = (f^n)$  se denotan por  $S_{\{f\}}$  y  $M_{\{f\}}$  el anillo separado y completo de  $A_f$  y el módulo separado y completo de  $M_f$ , respectivamente, para la topología  $J_f$ -ádica.

<sup>3</sup>Dado  $A$  un anillo  $J$ -ádico y  $\mathfrak{p} \subset A$  un ideal primo abierto denotamos  $A_{\{\mathfrak{p}\}} = \varinjlim_{f \notin \mathfrak{p}} A_{\{f\}}$ . Observemos que  $A_{\{\mathfrak{p}\}}$  es un anillo  $J_{\{\mathfrak{p}\}}$ -préadico. Si  $M$  es un  $A$ -módulo, llamamos  $M_{\{\mathfrak{p}\}} = \varinjlim_{f \notin \mathfrak{p}} M_{\{f\}}$ .



- (1) El *anillo de series formales restringidas*  $A\{\mathbf{T}\}$  es la completación de  $A[\mathbf{T}]$  respecto a la topología  $I[\mathbf{T}]$ -ádica. Si  $I\{\mathbf{T}\}$  es el ideal formado por las series formales restringidas con coeficientes en  $I$ , se verifica que  $I\{\mathbf{T}\} = I \cdot A\{\mathbf{T}\}$  y que  $A\{\mathbf{T}\}$  es un anillo  $I\{\mathbf{T}\}$ -ádico noetheriano (cf. [EGA I, (0.7.5.2)]). Llamamos *r-espacio formal afín sobre A* o *espacio formal afín de dimensión r sobre A* al esquema formal

$$\mathbb{A}_{\mathrm{Spf}(A)}^r = \mathrm{Spf}(A\{\mathbf{T}\})$$

Obsérvese que el espacio topológico subyacente de  $\mathbb{A}_{\mathrm{Spf}(A)}^r$  es el *r-espacio afín sobre A/I*,  $\mathbb{A}_{\mathrm{Spec}(A/I)}^r$ .

- (2) El *anillo de series formales*  $A[[\mathbf{T}]]$  es la completación de  $A[\mathbf{T}]$  respecto a la topología  $(I[\mathbf{T}] + \langle \mathbf{T} \rangle)$ -ádica. Si  $I[[\mathbf{T}]]$  denota el ideal formado por las series formales con coeficientes en  $I$  y  $[[\mathbf{T}]]$  es el ideal formado por las series formales sin término independiente, se tiene que  $I[[\mathbf{T}]] = I \cdot A[[\mathbf{T}]]$ ,  $[[\mathbf{T}]] = \langle \mathbf{T} \rangle \cdot A[[\mathbf{T}]]$  y que  $A[[\mathbf{T}]]$  es un anillo  $(I[[\mathbf{T}]] + [[\mathbf{T}]])$ -ádico noetheriano (cf. [Ma, Theorem 3.3 y Exercise 8.6]). Se define el *r-disco formal sobre A* o *disco formal de dimensión r sobre A* como

$$\mathbb{D}_{\mathrm{Spf}(A)}^r = \mathrm{Spf}(A[[\mathbf{T}]])$$

El espacio topológico subyacente de  $\mathbb{D}_{\mathrm{Spf}(A)}^r$  es  $\mathrm{Spec}(A/I)$ . Nótese que si en el anillo  $A[[\mathbf{T}]]$  hubiésemos considerado la topología  $[[\mathbf{T}]]$ -ádica el espacio topológico subyacente del esquema formal afín correspondiente sería  $\mathrm{Spec}(A)$ .

DEFINICIÓN 1.1.4. [EGA I, (10.3.1)] Dado  $A$  un anillo  $I$ -ádico sea  $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$ . Si  $J$  es un ideal de definición<sup>4</sup> de  $A$  se dice que<sup>5</sup>  $J^\Delta = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \tilde{J}/\tilde{J}^n \subset$

$\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$  es un *Ideal de definición de  $\mathfrak{X}$* . En particular,  $I^\Delta$  es un Ideal de definición de  $\mathfrak{X}$ .

Dado  $J^\Delta$  un Ideal de definición de  $\mathfrak{X}$  se verifica que

$$(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/J^\Delta) = \mathrm{Spec}(A/J)$$

y, por lo tanto, cualquier Ideal de definición de  $\mathfrak{X}$  determina su espacio topológico subyacente.

EJEMPLO 1.1.5. Con las hipótesis y notaciones del Ejemplo 1.1.3, resulta que  $I\{\mathbf{T}\}^\Delta$  es un Ideal de definición de  $\mathbb{A}_{\mathrm{Spf}(A)}^r$  y que  $(I[[\mathbf{T}]] + [[\mathbf{T}]])^\Delta$  es un Ideal de definición de  $\mathbb{D}_{\mathrm{Spf}(A)}^r$ .

<sup>4</sup>Dado  $A$  un anillo  $I$ -preádico, un *ideal de definición de A* es un ideal de modo que la topología determinada por él en  $A$  coincide con la  $I$ -ádica (cf. [EGA I, (0.7.1.2)]).

<sup>5</sup>En general, si  $A$  es un anillo  $J$ -ádico y  $M$  un  $A$ -módulo, en 2.1.12 se define  $M^\Delta = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \frac{M}{J^{n+1}M}$ .

DEFINICIÓN 1.1.6. [EGA I, (10.4.2)] Un espacio topológicamente anillado  $(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$  se dice que es un *esquema formal* si para todo  $x \in \mathfrak{X}$  existe un abierto  $\mathfrak{U}$  de  $\mathfrak{X}$  con  $x \in \mathfrak{U}$  tal que  $(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}|_{\mathfrak{U}})$  es un esquema formal afín. Si además los abiertos  $\mathfrak{U}$  son esquemas formales afines noetherianos se dirá que  $(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$  es un *esquema formal localmente noetheriano*. En ocasiones y, por comodidad, escribiremos  $\mathfrak{X}$  en lugar de  $(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$ .

EJEMPLO 1.1.7. [EGA I, (10.8.3)] Dado  $X$  un esquema y  $X' \subset X$  un subesquema cerrado dado por un Ideal coherente  $\mathcal{I}$  de  $\mathcal{O}_X$ , se llama *compleción de  $X$  a lo largo de  $X'$*  y se escribe  $(X_{/X'}, \mathcal{O}_{X_{/X'}})$  o, de modo abreviado,  $X_{/X'}$ , al espacio topológicamente anillado con espacio topológico subyacente  $X'$  y cuyo haz de anillos topológicos es  $\mathcal{O}_{X_{/X'}} = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{O}_X / \mathcal{I}^{n+1}$ .

Se comprueba que  $X_{/X'}$  es un esquema formal. Un esquema formal de esta forma se dice que es *algebraizable*. En particular, si  $X = \text{Spec}(A)$  es un esquema afín e  $\mathcal{I} = \tilde{I}$ , con  $I$  un ideal finitamente generado de  $A$ , se tiene que  $X_{/X'} = \text{Spf}(\hat{A})$  donde  $\hat{A}$  es el anillo separado y completo de  $A$  para la topología  $I$ -ádica. Se deduce que todo esquema formal afín noetheriano es algebraizable y, por lo tanto, todo esquema formal localmente noetheriano es localmente algebraizable.

En [HM, §5] se construye un esquema formal que no es algebraizable.

DEFINICIÓN 1.1.8. [EGA I, (10.4.5)] Sean  $(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$ ,  $(\mathfrak{Y}, \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}})$  dos esquemas formales. Un morfismo  $f : (\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}) \rightarrow (\mathfrak{Y}, \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}})$  de espacios topológicamente anillados tal que  $\forall x \in \mathfrak{X}$ ,  $f_x^\# : \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}, f(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathfrak{X}, x}$  es un homomorfismo local se dice que es un *morfismo de esquemas formales*. Denotaremos por  $\text{Hom}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$  el conjunto de los morfismos de esquemas formales de  $\mathfrak{X}$  en  $\mathfrak{Y}$ .

1.1.9. Los esquemas formales junto con los morfismos de esquemas formales forman una categoría que denotaremos por  $\text{Sf}$  y, la subcategoría plena de  $\text{Sf}$  cuyos objetos son los esquemas formales localmente noetherianos se denotará por  $\text{Sfn}$ . Por otra parte, se verifica que los esquemas formales afines forman una subcategoría plena de  $\text{Sf}$ , que llamaremos  $\text{Sf}_{\text{af}}$ . Del mismo modo se tiene que los esquemas formales afines noetherianos forman una subcategoría plena de  $\text{Sfn}$ , que denotaremos por  $\text{Sfn}_{\text{af}}$ .

El siguiente resultado nos proporciona una equivalencia útil de categorías que generaliza la conocida relación entre la categoría de anillos y la de esquemas.

PROPOSICIÓN 1.1.10. [EGA I, (10.2.2)] *Los funtores*

$$A \rightsquigarrow \text{Spf}(A) \quad \text{y} \quad \mathfrak{X} \rightsquigarrow \Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}) \quad (1.1.10.1)$$

*definen una equivalencia contravariante de categorías entre la categoría de los anillos ádicos y  $\text{Sf}_{\text{af}}$ . Además, la restricción de estos funtores a la categoría de los anillos ádicos noetherianos y a  $\text{Sfn}_{\text{af}}$  proporciona también una equivalencia de categorías contravariante.*

NOTACIÓN. En ocasiones, a lo largo de esta memoria y, cometiendo un abuso de notación, utilizaremos la misma letra para denotar un morfismo  $\mathrm{Spf}(A) \xrightarrow{f} \mathrm{Spf}(B)$  en  $\mathrm{Sf}_{\mathrm{af}}$  y el homomorfismo continuo de anillos correspondiente dado por la equivalencia de categorías (1.1.10.1),  $B \xrightarrow{f} A$ .

1.1.11. Como consecuencia de la proposición anterior se tienen los siguientes morfismos de esquemas formales:

- (1) Dado  $A$  un anillo  $I$ -ádico, el morfismo  $A \rightarrow A_{\{f\}}$  induce la inclusión canónica en  $\mathrm{Sf}_{\mathrm{af}}$

$$\mathfrak{D}(f) \hookrightarrow \mathrm{Spf}(A)$$

- (2) Si  $A$  es un anillo  $I$ -ádico noetheriano, las inclusiones canónicas

$$A \hookrightarrow A\{T_1, T_2, \dots, T_r\} \hookrightarrow A[[T_1, T_2, \dots, T_r]]$$

son morfismos continuos para las topologías ádicas establecidas en el Ejemplo 1.1.3 y, por lo tanto, inducen los siguientes morfismos canónicos en  $\mathrm{Sfn}_{\mathrm{af}}$

$$\mathbb{D}_{\mathrm{Spf}(A)}^r \rightarrow \mathbb{A}_{\mathrm{Spf}(A)}^r \rightarrow \mathrm{Spf}(A)$$

- (3) Con las notaciones del Ejemplo 1.1.7, los morfismos

$$\mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_X/\mathcal{I}^{n+1}$$

inducen un morfismo canónico en  $\mathrm{Sf}$  que, como aplicación topológica es la inclusión de  $X'$  en  $X$ ,

$$X_{/X'} \xrightarrow{\kappa} X$$

llamado *morfismo de completión de  $X$  a lo largo de  $X'$*  y que localmente viene dado por  $\mathrm{Spf}(\widehat{A}) \rightarrow \mathrm{Spec}(A)$ .

DEFINICIÓN 1.1.12. [EGA I, (10.5.1)] Sea  $(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$  un esquema formal. Un Ideal  $\mathcal{J}$  de  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$  se dice que es un *Ideal de definición de  $\mathfrak{X}$*  si para todo  $x \in \mathfrak{X}$  existe un abierto  $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{X}$  con  $x \in \mathfrak{U}$  tal que  $(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}|_{\mathfrak{U}})$  es un esquema formal afín y  $\mathcal{J}|_{\mathfrak{U}}$  es un Ideal de definición de  $\mathfrak{U}$ .

EJEMPLO 1.1.13. Sea  $X$  un esquema (usual).

- (1) Cualquier Ideal  $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_X$  localmente nilpotente es un Ideal de definición de  $X$ .

- (2) Si  $X' \subset X$  es un subesquema cerrado dado por un Ideal  $\mathcal{I}$  coherente, el Ideal  $\mathcal{I}_{/X'} := \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{I}/\mathcal{I}^{n+1}$  es un Ideal de definición de  $X_{/X'}$  y

se verifica que  $\mathcal{O}_{X_{/X'}}/(\mathcal{I}_{/X'})^{n+1} = \mathcal{O}_X/\mathcal{I}^{n+1}$ . Además, si  $X = \mathrm{Spec}(A)$ ,  $\mathcal{I} = \widetilde{I}$  y  $X_{/X'} = \mathrm{Spf}(\widehat{A}) \xrightarrow{\kappa} X = \mathrm{Spec}(A)$  es el morfismo de completión de  $X$  a lo largo de  $X'$ , se tiene que

$$\mathcal{I}_{/X'} \underset{1.1.4}{=} I^{\Delta} = \kappa^* \widetilde{I}$$

La siguiente proposición garantiza la existencia de Ideales de definición para los esquemas formales localmente noetherianos.

PROPOSICIÓN 1.1.14. [EGA I, (10.5.4)] *Dado  $(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$  un esquema formal localmente noetheriano, existe  $\mathcal{J}$  el Ideal de definición más grande de  $\mathfrak{X}$  tal que  $(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/\mathcal{J})$  un esquema (usual) reducido.*

1.1.15. [EGA I, (10.6.10)] Como consecuencia de la Proposición 1.1.14 se prueba que dado  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  un morfismo en  $\mathbf{Sfn}$ , si  $\mathcal{K} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$  es un Ideal de definición, entonces existe un Ideal de definición  $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$  tal que  $f^*(\mathcal{K})\mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \subset \mathcal{J}$ .

Un esquema formal afín soporta todas las estructuras de subesquema cerrado que existen sobre su espacio topológico subyacente. A continuación hacemos explícita esta idea en el caso de esquemas formales localmente noetherianos.

1.1.16. Dado  $(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$  en  $\mathbf{Sf}$  y  $\mathcal{J}$  un Ideal de definición de  $\mathfrak{X}$  tal que  $\mathcal{J}/\mathcal{J}^2$  es un  $(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/\mathcal{J})$ -Módulo de tipo finito<sup>6</sup> se verifica que  $\mathcal{J}^{n+1}$  es un Ideal de definición y que  $X_n = (\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/\mathcal{J}^{n+1})$  es un esquema (usual) con el mismo espacio topológico que  $\mathfrak{X}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$  (cf. [EGA I, (10.5.1) y (10.5.2)]). Sea  $X_n \xrightarrow{i_n} \mathfrak{X}$ , el morfismo canónico determinado por  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/\mathcal{J}^{n+1}$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Si para  $m \geq n \geq 0$ ,  $X_n \xrightarrow{i_{mn}} X_m$  son los encajes cerrados naturales definidos por  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/\mathcal{J}^{m+1} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/\mathcal{J}^{n+1}$  se tiene que

$$i_m \circ i_{mn} = i_n$$

y, por lo tanto,  $\{X_n, i_{mn}\}$  es un sistema directo en  $\mathbf{Sf}$ . Resulta que  $(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$  es el límite directo de  $\{X_n, i_{mn}\}$  en  $\mathbf{Sf}$ . Diremos que  $\mathfrak{X}$  se expresa de la forma  $\varinjlim_{n \in \mathbb{N}} X_n$  respecto al Ideal de definición  $\mathcal{J}$  y, abreviadamente lo indicaremos así:

$$\mathfrak{X} = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} X_n$$

Nótese que si  $\mathfrak{X}$  está en  $\mathbf{Sfn}$  se verifica que los esquemas  $X_n$  son localmente noetherianos, para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Supongamos que  $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$  está en  $\mathbf{Sf}_{\mathrm{af}}$  y que  $\mathcal{J} = J^{\Delta}$  es un Ideal de definición de  $\mathfrak{X}$  siendo  $J \subset A$  un ideal de definición tal que  $J/J^2$  es un  $(A/J)$ -módulo de tipo finito. Aplicando [EGA I, (10.3.6)] resulta que  $\mathcal{J}^{n+1} = (J^{\Delta})^{n+1} = (J^{n+1})^{\Delta}$  y se tiene que  $X_n = \mathrm{Spec}(A/J^{n+1})$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$  (véase la Definición 1.1.4). En este caso la expresión  $\mathfrak{X} = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} X_n$  se

corresponde con la igualdad  $A = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} A/J^{n+1}$  a través de la equivalencia de categorías (1.1.10.1).

---

<sup>6</sup>Cuando  $\mathfrak{X}$  está en  $\mathbf{Sfn}$  todo Ideal de definición  $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$  verifica que  $\mathcal{J}/\mathcal{J}^2$  es un  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/\mathcal{J}$ -Módulo de tipo finito

1.1.17. [EGA I, (10.6.7), (10.6.8) y (10.6.9)] Dado  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  un morfismo en  $\mathbf{Sf}$ , sean  $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$  y  $\mathcal{K} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$  Ideales de definición tales que  $\mathcal{J}/\mathcal{J}^2$  es un  $(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/\mathcal{J})$ -Módulo de tipo finito y  $\mathcal{K}/\mathcal{K}^2$  es un  $(\mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}/\mathcal{K})$ -Módulo de tipo finito, y verificando que  $f^*(\mathcal{K})\mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \subset \mathcal{J}$ . Por 1.1.16, se tiene que

$$\mathfrak{X} = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} X_n \quad \text{e} \quad \mathfrak{Y} = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} Y_n$$

donde, para cada  $n \in \mathbb{N}$   $X_n := (\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/\mathcal{J}^{n+1})$  e  $Y_n := (\mathfrak{Y}, \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}/\mathcal{K}^{n+1})$ . Entonces, existe un único morfismo de esquemas  $f_n : X_n \rightarrow Y_n$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$ , de modo que, para  $m \geq n \geq 0$  los siguientes diagramas son conmutativos:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{X} & \xrightarrow{f} & \mathfrak{Y} \\ \uparrow i_m & & \uparrow j_m \\ X_m & \xrightarrow{f_m} & Y_m \\ \uparrow i_{mn} & & \uparrow j_{mn} \\ X_n & \xrightarrow{f_n} & Y_n, \end{array}$$

El morfismo  $f$  es límite directo en  $\mathbf{Sf}$  del sistema  $\{f_n, i_{mn}, j_{mn}\}$  asociado a los Ideales de definición  $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$  y  $\mathcal{K} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$  y escribiremos

$$f = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} f_n$$

Obsérvese que si  $f$  está en  $\mathbf{Sfn}$  y  $\mathcal{K} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$  es un Ideal de definición, por 1.1.15 siempre existe un Ideal de definición  $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$  tal que  $f^*(\mathcal{K})\mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \subset \mathcal{J}$ . Además los morfismos  $f_n$  están en la categoría de esquemas localmente noetherianos, para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Supongamos que  $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A) \xrightarrow{f} \mathfrak{Y} = \mathrm{Spf}(B)$  está en  $\mathbf{Sf}_{\mathrm{af}}$  y que existen  $\mathcal{J} = J^\Delta \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$  y  $\mathcal{K} = K^\Delta \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$  Ideales de definición tales que  $J/J^2$  es un  $(A/J)$ -módulo de tipo finito y  $K/K^2$  es un  $(B/K)$ -módulo de tipo finito. Sea  $B \xrightarrow{\bar{f}} A$  el homomorfismo continuo de anillos ádicos que se corresponde con  $f$  a través de la equivalencia de categorías (1.1.10.1). Se comprueba fácilmente que  $f^*(\mathcal{K})\mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \subset \mathcal{J}$  si, y sólo si,  $KA \subset J$ . Además, se tiene que los morfismos  $f_n$  se corresponden con los morfismos canónicos  $B/K^{n+1} \rightarrow A/J^{n+1}$  inducidos por el morfismo  $\bar{f}$ .

1.1.18. Sean  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  y  $\mathfrak{Y} \xrightarrow{g} \mathfrak{S}$  dos morfismos en  $\mathbf{Sf}$  y consideremos  $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ ,  $\mathcal{K} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$  y  $\mathcal{L} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{S}}$  Ideales de definición tales que  $\mathcal{J}/\mathcal{J}^2$  es un  $(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/\mathcal{J})$ -Módulo de tipo finito,  $\mathcal{K}/\mathcal{K}^2$  es un  $(\mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}/\mathcal{K})$ -Módulo de tipo finito y  $\mathcal{L}/\mathcal{L}^2$  es un  $(\mathcal{O}_{\mathfrak{S}}/\mathcal{L})$ -Módulo de tipo finito, y verificando que  $f^*(\mathcal{K})\mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \subset \mathcal{J}$  y  $g^*(\mathcal{L})\mathcal{O}_{\mathfrak{Y}} \subset \mathcal{K}$ . Por 1.1.17, se tiene que  $f = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} f_n$ ,  $g = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} g_n$ , donde

$(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/\mathcal{J}^{n+1}) \xrightarrow{f_n} (\mathfrak{Y}, \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}/\mathcal{K}^{n+1})$  y  $(\mathfrak{Y}, \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}/\mathcal{K}^{n+1}) \xrightarrow{g_n} (\mathfrak{S}, \mathcal{O}_{\mathfrak{S}}/\mathcal{L}^{n+1})$  son

los morfismos inducidos por  $f$  y  $g$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Entonces, se verifica que

$$g \circ f = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} g_n \circ f_n$$

NOTACIONES. A partir de ahora y durante toda esta memoria utilizaremos las siguientes notaciones:

- (1) Dado  $\mathfrak{X}$  en  $\mathbf{Sf}$  y  $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$  un Ideal de definición tal que  $\mathcal{J}/\mathcal{J}^2$  es un  $(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/\mathcal{J})$ -Módulo de tipo finito, para cada  $n \in \mathbb{N}$   $X_n$  denotará el esquema  $(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/\mathcal{J}^{n+1})$ .
- (2) Si  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  es un morfismo en  $\mathbf{Sf}$ , dados  $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$  y  $\mathcal{K} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$  Ideales de definición tales que  $\mathcal{J}/\mathcal{J}^2$  es un  $(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/\mathcal{J})$ -Módulo de tipo finito y  $\mathcal{K}/\mathcal{K}^2$  es un  $(\mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}/\mathcal{K})$ -Módulo de tipo finito, y verificando que  $f^*(\mathcal{K})\mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \subset \mathcal{J}$ ,  $X_n := (\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/\mathcal{J}^{n+1}) \xrightarrow{f_n} Y_n := (\mathfrak{Y}, \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}/\mathcal{K}^{n+1})$  será el morfismo de esquemas inducido por  $f$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

DEFINICIÓN 1.1.19. Sean  $\mathfrak{S}$  y  $\mathfrak{X}$  en  $\mathbf{Sf}$ . Si existe un morfismo  $\mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{S}$  se dice que  $\mathfrak{X}$  es un  $\mathfrak{S}$ -esquema formal. En particular, si  $\mathfrak{X} = X$  es un esquema (usual) se dirá que  $X$  es un  $\mathfrak{S}$ -esquema. Nótese que, todo esquema formal  $\mathfrak{X}$  en  $\mathbf{Sf}$  es un  $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ -esquema formal.

Dados  $\mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{S}$  y  $\mathfrak{Y} \rightarrow \mathfrak{S}$  morfismos en  $\mathbf{Sf}$ , un morfismo  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  en  $\mathbf{Sf}$  es un  $\mathfrak{S}$ -morfismo si el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{X} & \xrightarrow{f} & \mathfrak{Y} \\ & \searrow & \downarrow \\ & & \mathfrak{S} \end{array}$$

es conmutativo. Los  $\mathfrak{S}$ -esquemas formales forman una categoría y denotaremos por  $\text{Hom}_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$  el conjunto de  $\mathfrak{S}$ -morfismos entre  $\mathfrak{X}$  e  $\mathfrak{Y}$ .

PROPOSICIÓN 1.1.20. [EGA I, (10.7.3)] Sean  $\mathfrak{X}$  e  $\mathfrak{Y}$  dos  $\mathfrak{S}$ -esquemas formales en  $\mathbf{Sf}$ . Entonces existe el producto fibrado de  $\mathfrak{X}$  e  $\mathfrak{Y}$  en la categoría de los  $\mathfrak{S}$ -esquemas formales y se escribe  $\mathfrak{X} \times_{\mathfrak{S}} \mathfrak{Y}$ , de modo que el siguiente diagrama en  $\mathbf{Sf}$  es cartesiano:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{X} \times_{\mathfrak{S}} \mathfrak{Y} & \longrightarrow & \mathfrak{Y} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathfrak{X} & \longrightarrow & \mathfrak{S} \end{array} \quad (1.1.20.2)$$

Además, si  $\mathfrak{X} = \text{Spf}(A)$ ,  $\mathfrak{Y} = \text{Spf}(B)$ ,  $\mathfrak{S} = \text{Spf}(C)$ , con  $A, B, C$  anillos ádicos, el producto viene dado por  $\text{Spf}(A \widehat{\otimes}_C B)$ <sup>7</sup>.

<sup>7</sup>[EGA I, (0.7.7.1) y (0.7.7.2)] Si  $J \subset A$ ,  $K \subset B$  y  $L \subset C$  son ideales de definición tales que  $LB \subset K$  y  $LA \subset J$ ,  $A \widehat{\otimes}_C B$  es el anillo separado y completo de  $A \otimes_C B$  respecto

OBSERVACIÓN. Al igual que ocurre en la categoría de esquemas localmente noetherianos (cf. [EGA I, (3.2.5)]),  $\mathbf{Sfn}$  no es estable para productos fibrados.

1.1.21. [EGA I, (10.7.4)] Dados  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{S}$  y  $\mathfrak{Y} \xrightarrow{g} \mathfrak{S}$  en  $\mathbf{Sfn}$ , sean  $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ ,  $\mathcal{K} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$  y  $\mathcal{L} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{S}}$  Ideales de definición tales que  $\mathcal{J}/\mathcal{J}^2$  es un  $(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/\mathcal{J})$ -Módulo de tipo finito,  $\mathcal{K}/\mathcal{K}^2$  es un  $(\mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}/\mathcal{K})$ -Módulo de tipo finito y  $\mathcal{L}/\mathcal{L}^2$  es un  $(\mathcal{O}_{\mathfrak{S}}/\mathcal{L})$ -Módulo de tipo finito, y verificando que  $f^*(\mathcal{K})\mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \subset \mathcal{J}$  y  $g^*(\mathcal{L})\mathcal{O}_{\mathfrak{Y}} \subset \mathcal{K}$ . Consideremos que  $f = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} (X_n \xrightarrow{f_n} S_n)$  y  $g = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} (Y_n \xrightarrow{g_n} S_n)$ . Entonces el diagrama (1.1.20.2) es límite directo de los diagramas cartesianos

$$\begin{array}{ccc} X_n \times_{S_n} Y_n & \longrightarrow & Y_n \\ \downarrow & & \downarrow g_n \\ X_n & \xrightarrow{f_n} & S_n \end{array} \quad (n \in \mathbb{N})$$

y, por lo tanto,

$$\mathfrak{X} \times_{\mathfrak{S}} \mathfrak{Y} = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} X_n \times_{S_n} Y_n$$

1.1.22. Sea  $\mathfrak{X}$  en  $\mathbf{Sfn}$ .

- (1) Llamamos *r-espacio formal afín sobre  $\mathfrak{X}$*  o *espacio formal afín de dimensión r sobre  $\mathfrak{X}$*  a  $\mathbb{A}_{\mathfrak{X}}^r = \mathfrak{X} \times_{\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})} \mathbb{A}_{\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})}^r$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}_{\mathfrak{X}}^r & \xrightarrow{p} & \mathfrak{X} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{A}_{\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})}^r & \longrightarrow & \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}) \end{array}$$

Dado  $\mathfrak{U} = \mathrm{Spf}(A) \subset \mathfrak{X}$  un abierto afín, se tiene que

$$\mathbb{A}_{\mathfrak{X}}^r|_{\mathfrak{U}} = \mathbb{A}_{\mathrm{Spf}(A)}^r \stackrel{1.1.3.(1)}{=} \mathrm{Spf}(A\{\mathbf{T}\})$$

de donde se deduce que  $\mathbb{A}_{\mathfrak{X}}^r$  está en  $\mathbf{Sfn}$ .

- (2) Llamamos *r-disco formal sobre  $\mathfrak{X}$*  o *disco formal de dimensión r sobre  $\mathfrak{X}$*  a  $\mathbb{D}_{\mathfrak{X}}^r = \mathfrak{X} \times_{\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})} \mathbb{D}_{\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})}^r$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{D}_{\mathfrak{X}}^r & \xrightarrow{p} & \mathfrak{X} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{D}_{\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})}^r & \longrightarrow & \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}) \end{array}$$

a la topología  $(J(A \otimes_C B) + K(A \otimes_C B))$ -ádica o, equivalentemente,

$$A \widehat{\otimes}_C B = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} A/J^{n+1} \otimes_{C/L^{n+1}} B/K^{n+1}$$

Si  $\mathfrak{U} = \text{Spf}(A) \subset \mathfrak{X}$  es un abierto afín, se verifica que

$$\mathbb{D}_{\mathfrak{X}}^r|_{\mathfrak{U}} = \mathbb{D}_{\text{Spf}(A)}^r \stackrel{1.1.3.(2)}{=} \text{Spf}(A[[\mathbf{T}]])$$

y, por lo tanto,  $\mathbb{D}_{\mathfrak{X}}^r$  está en  $\text{Sfn}$ .

OBSERVACIÓN. A partir de ahora y salvo excepciones que se indicarán, todos los esquemas formales considerados estarán en  $\text{Sfn}$ . Supondremos que todos los anillos son noetherianos y que, por lo tanto, todo anillo completo y todo módulo completo para una topología ádica son también separados.

DEFINICIÓN 1.1.23. Sea  $\mathfrak{X}$  en  $\text{Sfn}$ ,  $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$  un Ideal de definición y  $x \in \mathfrak{X}$ . Llamamos *dimensión topológica de  $\mathfrak{X}$  en  $x$*  a

$$\dim_{\text{top}_x} \mathfrak{X} = \dim_x X_0$$

La definición no depende del Ideal de definición escogido de  $\mathfrak{X}$ . Para comprobarlo, podemos suponer que  $\mathfrak{X} = \text{Spf}(A)$ . Si  $J$  y  $J'$  son ideales de definición de  $A$ , existen  $k, l \in \mathbb{N}$  tal que  $J^k \subset J'$  y  $J'^l \subset J$  y, por lo tanto, se tiene que  $\dim A/J = \dim A/J'$ . Se define la *dimensión topológica de  $\mathfrak{X}$*  como

$$\dim_{\text{top}} \mathfrak{X} = \sup_{x \in \mathfrak{X}} \dim_{\text{top}_x} \mathfrak{X} = \sup_{x \in \mathfrak{X}} \dim_x X_0 = \dim X_0$$

Así, si  $\mathfrak{X} = \text{Spf}(A)$  con  $A$  un anillo  $I$ -ádico noetheriano, se verifica que  $\dim_{\text{top}} \mathfrak{X} = \dim A/I$ . En particular,

$$\begin{aligned} \dim_{\text{top}} \mathbb{A}_{\text{Spf}(A)}^r &= \dim \mathbb{A}_{\text{Spec}(A/I)}^r = \dim A/I + r \\ \dim_{\text{top}} \mathbb{D}_{\text{Spf}(A)}^r &= \dim \text{Spec}(A/I) = \dim A/I \end{aligned}$$

Dado  $A$  un anillo  $I$ -ádico, sean  $X = \text{Spec}(A)$  y  $\mathfrak{X} = \text{Spf}(A)$ . A pesar de que el espacio topológico de  $\mathfrak{X}$  es  $V(I)$ , veremos a lo largo de este trabajo que lo que ocurre en  $X \setminus V(I)$  se manifiesta en cierto modo en el comportamiento de  $\mathfrak{X}$ . De ahí que sea necesario considerar aparte de la dimensión topológica de  $\mathfrak{X}$ , una dimensión que tenga en cuenta la información “oculta”: la dimensión algebraica.

DEFINICIÓN 1.1.24. Sea  $\mathfrak{X}$  en  $\text{Sfn}$  y  $\mathcal{J}$  un Ideal de definición de  $\mathfrak{X}$ . Dado  $x \in \mathfrak{X}$  se define la *dimensión algebraica de  $\mathfrak{X}$  en  $x$*  como

$$\dim_x \mathfrak{X} = \dim \mathcal{O}_{\mathfrak{X},x}$$

La *dimensión algebraica de  $\mathfrak{X}$*  es

$$\dim \mathfrak{X} = \sup_{x \in \mathfrak{X}} \dim_x \mathfrak{X}$$

LEMA 1.1.25. Dado  $A$  un anillo noetheriano e  $I$  un ideal de  $A$ , denotemos por  $\widehat{A}$  el completado de  $A$  para la topología  $I$ -ádica. Se verifica que  $\dim \widehat{A} = \sup_{I \subset \mathfrak{p}} \dim A_{\mathfrak{p}}$  y, por lo tanto,  $\dim \widehat{A} \leq \dim A$ .

En particular, si  $A$  es  $I$ -ádico,  $\dim A = \sup_{I \subset \mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)} \dim A_{\mathfrak{p}}$ .



DEMOSTRACIÓN. Es conocido que existe una correspondencia biunívoca entre los ideales maximales de  $A$  que contienen a  $I$  y los ideales maximales de  $\widehat{A}$  dada por  $\mathfrak{m} \rightarrow \widehat{\mathfrak{m}}$  [B1, III, §3.4, Proposition 8]. Por lo tanto

$$\dim \widehat{A} = \sup_{I \subset \mathfrak{m} \in \text{Max}(A)} \dim \widehat{A}_{\widehat{\mathfrak{m}}} = \sup_{I \subset \mathfrak{m} \in \text{Max}(A)} \dim A_{\mathfrak{m}} = \sup_{I \subset \mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)} \dim A_{\mathfrak{p}}$$

ya que  $A_{\mathfrak{m}} \hookrightarrow \widehat{A}_{\widehat{\mathfrak{m}}}$  es una extensión plana de anillos locales con el mismo cuerpo residual. El resto de las afirmaciones se siguen de esta igualdad.  $\square$

COROLARIO 1.1.26. *Si  $\mathfrak{X} = \text{Spf}(A)$  con  $A$  un anillo  $I$ -ádico noetheriano entonces*

$$\dim \mathfrak{X} = \dim A$$

DEMOSTRACIÓN. Para cada  $x \in \mathfrak{X}$ , si  $\mathfrak{p}_x$  es el ideal primo abierto correspondiente en  $A$  se tiene que

$$\dim_x \mathfrak{X} = \dim A_{\{\mathfrak{p}_x\}} = \dim A_{\mathfrak{p}_x}$$

ya que  $A_{\mathfrak{p}_x} \hookrightarrow A_{\{\mathfrak{p}_x\}}$  es una extensión plana de anillos locales con el mismo cuerpo residual. Entonces, del Lema 1.1.25 se deduce el resultado.  $\square$

COROLARIO 1.1.27. *Sea  $A$  un anillo  $I$ -ádico noetheriano y denotemos por  $\mathbf{T}$  el conjunto de las variables  $T_1, T_2, \dots, T_r$ . Entonces:*

$$\dim A\{\mathbf{T}\} = \dim A[[\mathbf{T}]] = \dim A + r$$

DEMOSTRACIÓN. Por el Lema 1.1.25 se tiene que

$$\dim A[[\mathbf{T}]] \leq \dim A\{\mathbf{T}\} \leq \dim A[\mathbf{T}] = \dim A + r$$

Para probar la igualdad es suficiente ver que  $\dim A[[\mathbf{T}]] \geq \dim A + r$ . Para ello utilizaremos inducción en el número de variables  $r$ . Supongamos que  $r = 1$ . Dada  $\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{p}_l$  una cadena de ideales primos en  $A$  se tiene que  $\mathfrak{p}_0[[T]] \subset \mathfrak{p}_1[[T]] \subset \mathfrak{p}_l[[T]] \subset \mathfrak{p}_l[[T]] + [[T]]$  es una cadena de ideales primos en  $A[[T]]$  y, por lo tanto,  $\dim A\{T\} = \dim A[[T]] = \dim A + 1$ . Dado  $r \in \mathbb{N}$  arbitrario, consideremos que la igualdad es cierta para  $i < r$ . Como  $A[[T_1, T_2, \dots, T_r]] = A[[T_1, T_2, \dots, T_{r-1}]][[T_r]]$ , por hipótesis de inducción se obtiene el resultado.  $\square$

EJEMPLO 1.1.28. Sea  $A$  un anillo  $I$ -ádico noetheriano. Entonces

$$\begin{aligned} \dim \mathbb{A}_{\text{Spf}(A)}^r &\stackrel{1.1.26}{=} \dim A\{\mathbf{T}\} \stackrel{1.1.27}{=} \dim A + r \stackrel{1.1.26}{=} \dim \text{Spf}(A) + r \\ \dim \mathbb{D}_{\text{Spf}(A)}^r &\stackrel{1.1.26}{=} \dim A[[\mathbf{T}]] \stackrel{1.1.27}{=} \dim A + r \stackrel{1.1.26}{=} \dim \text{Spf}(A) + r \end{aligned}$$

A la vista de los ejemplos anteriores, la dimensión algebraica de un esquema formal no mide la dimensión del espacio topológico subyacente. En general, para  $\mathfrak{X}$  en  $\text{Sfn}$ ,  $\dim_x \mathfrak{X} \geq \dim_{\text{top}_x} \mathfrak{X}$ , cualquiera que sea  $x \in \mathfrak{X}$  y, por lo tanto

$$\dim \mathfrak{X} \geq \dim_{\text{top}} \mathfrak{X}$$

Además, si  $\mathfrak{X} = \text{Spf}(A)$  con  $A$  un anillo  $I$ -ádico se tiene trivialmente que  $\dim \mathfrak{X} \geq \dim_{\text{top}} \mathfrak{X} + \text{ht}(I)$ .

## 1.2. Propiedades de morfismos de esquemas formales

En esta parte estudiamos ciertas propiedades de morfismos de esquemas formales localmente noetherianos. En primer lugar, recordamos la definición de morfismo ádico de esquemas formales (*cf.* [EGA I, §10.12]), cuyo comportamiento es similar a los morfismos en Sch. De hecho un morfismo ádico puede interpretarse como un conjunto de “esquemas relativos” con base un esquema formal, de ahí la importancia que tienen para Grothendieck. En esta memoria juegan solamente un papel auxiliar. A continuación, se define la fibra de un morfismo de esquemas formales  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  en un punto  $y \in \mathfrak{Y}$  y la dimensión algebraica relativa de  $f$  en un punto  $x \in \mathfrak{X}$ . La sección se completa con la definición y el estudio de los pseudo encajes cerrados, que es una clase importante de morfismos no ádicos; estudiaremos también los morfismos separados (*cf.* [EGA I, §10.15]) y los morfismos radicales. Estas dos últimas propiedades poseen un comportamiento análogo a sus correspondientes en el caso de esquemas, y desempeñan un papel decisivo en el resto del trabajo.

1.2.1. [EGA I, (10.12.1)] Un morfismo  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  en Sfn es *ádico* (o se dice que  $\mathfrak{X}$  es  $\mathfrak{Y}$ -*ádico*) si existe  $\mathcal{K}$  un Ideal de definición de  $\mathfrak{Y}$  tal que  $f^*(\mathcal{K})\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$  es un Ideal de definición de  $\mathfrak{X}$ . Si  $f$  es ádico, para todo  $\mathcal{K}' \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$  Ideal de definición se verifica que  $f^*(\mathcal{K}')\mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$  es un Ideal de definición.

Cuando  $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A) \xrightarrow{f} \mathfrak{Y} = \mathrm{Spf}(B)$  está en  $\mathrm{Sfn}_{\mathrm{af}}$  se tiene que  $f$  es ádico si dado  $K \subset B$  un ideal de definición,  $KA$  es un ideal de definición de  $A$ .

Si  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  es un morfismo ádico, la topología del haz de anillos de  $\mathfrak{Y}$  determina la topología del haz de anillos de  $\mathfrak{X}$ .

EJEMPLO 1.2.2. Sea  $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$  en  $\mathrm{Sfn}_{\mathrm{af}}$ . Entonces:

- (1) El morfismo canónico  $\mathbb{A}_{\mathfrak{X}}^r \rightarrow \mathfrak{X}$  es ádico.
- (2) Para cada  $f \in A$  la inclusión  $\mathfrak{D}(f) \hookrightarrow \mathfrak{X}$  es ádica.
- (3) Sin embargo, la proyección  $\mathbb{D}_{\mathfrak{X}}^r \rightarrow \mathfrak{X}$  sólo es ádica cuando  $r = 0$ , en cuyo caso es la identidad de  $\mathfrak{X}$ .

EJEMPLO 1.2.3. Dado  $X$  un esquema localmente noetheriano y  $X' \subset X$  un subesquema cerrado, el morfismo de completación de  $X$  a lo largo de  $X'$ ,  $X_{/X'} \xrightarrow{\kappa} X$  es ádico sólo si  $X$  y  $X'$  tienen el mismo espacio topológico subyacente  $Y$ , entonces  $X_{/X'} = X$  y  $\kappa = 1_X$ .

En la Proposición 1.2.5 se da una caracterización cómoda de los morfismos ádicos. Previamente necesitamos establecer algunas notaciones.

1.2.4. [EGA I, (10.12.2)] Sea  $\mathfrak{Y}$  en Sfn y  $\mathcal{K} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$  un Ideal de definición de modo que  $\mathfrak{Y} = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} Y_n$ . Un *sistema inductivo de  $Y_n$ -esquemas* es un sistema inductivo de esquemas localmente noetherianos  $\{X_n\}$  junto con una

colección de morfismos de esquemas  $\{X_n \xrightarrow{f_n} Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  haciendo conmutativos los diagramas

$$\begin{array}{ccc} X_m & \xrightarrow{f_m} & Y_m \\ \uparrow & & \uparrow \\ X_n & \xrightarrow{f_n} & Y_n \end{array} \quad (m \geq n \geq 0)$$

El sistema  $\{X_n \xrightarrow{f_n} Y_n\}$  se dirá *ádico* si los diagramas anteriores son cartesianos.

PROPOSICIÓN 1.2.5. [EGA I, (10.12.3)] *Con la notación anterior, el funtor*

$$\{X_n \xrightarrow{f_n} Y_n\} \rightsquigarrow f = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} f_n$$

establece una equivalencia canónica entre la categoría de los  $\{Y_n\}$ -sistemas inductivos ádicos y la categoría de los  $\mathfrak{Y}$ -esquemas formales ádicos, cuyo inverso es el funtor que asocia a un  $\mathfrak{Y}$ -esquema formal ádico localmente noetheriano  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  el sistema inductivo  $\{X_n \xrightarrow{f_n} Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  determinado por el Ideal de definición  $\mathcal{K} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$ .

1.2.6. Dados  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  y  $\mathfrak{Y} \xrightarrow{g} \mathfrak{S}$  en  $\text{Sfn}$  se verifican las siguientes propiedades:

- (1) Si  $f$  y  $g$  son ádicos, el morfismo  $g \circ f$  también es ádico.
- (2) Si  $g \circ f$  y  $g$  son ádicos, entonces  $f$  es ádico.
- (3) Si  $f$  es ádico, para todo cambio de base  $\mathfrak{Y}' \rightarrow \mathfrak{Y}$  en  $\text{Sfn}$  tal que  $\mathfrak{X}_{\mathfrak{Y}'}$  está en  $\text{Sfn}$  se tiene que  $\mathfrak{X}_{\mathfrak{Y}'} \xrightarrow{f_{\mathfrak{Y}'}} \mathfrak{Y}'$  es ádico.

En efecto, consideremos  $\mathcal{L}$  un Ideal de definición de  $\mathfrak{S}$ . El apartado (1) se deduce de las hipótesis y de la igualdad  $(g \circ f)^*(\mathcal{L})\mathcal{O}_{\mathfrak{X}} = f^*(g^*(\mathcal{L})\mathcal{O}_{\mathfrak{Y}})\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ . Veamos (2). Como  $g$  es ádico se verifica que  $g^*(\mathcal{L})\mathcal{O}_{\mathfrak{Y}} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$  es un Ideal de definición y, como  $g \circ f$  es ádico se tiene que  $f^*(g^*(\mathcal{L})\mathcal{O}_{\mathfrak{Y}})\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$  es un Ideal de definición de  $\mathfrak{X}$  y, por lo tanto,  $f$  es ádico. Para demostrar (3) podemos suponer que los esquemas formales son afines. Supongamos que  $\mathfrak{X} = \text{Spf}(A)$ ,  $\mathfrak{Y} = \text{Spf}(B)$  e  $\mathfrak{Y}' = \text{Spf}(B')$  con  $K \subset B$  y  $K' \subset B'$  ideales de definición tales que  $KB' \subset K'$ . Si llamamos  $A' = A \widehat{\otimes}_B B'$  basta ver que  $K'A'$  es un ideal de definición de  $A'$ . Como  $f$  es ádico,  $KA$  es un ideal de definición de  $A$  por lo que  $J' = KA(A \widehat{\otimes}_B B') + K'(A \widehat{\otimes}_B B')$  es un ideal de definición de  $A'$ . Entonces, como  $J' = KB'(A \widehat{\otimes}_B B') + K'(A \widehat{\otimes}_B B') = K'(A \widehat{\otimes}_B B')$  la afirmación se sigue de 1.2.1.

EJEMPLO 1.2.7. Dado  $\mathfrak{X}$  en  $\text{Sfn}$ ,  $\mathbb{A}_{\mathfrak{X}}^r = \mathfrak{X} \times_{\text{Spec}(\mathbb{Z})} \mathbb{A}_{\text{Spec}(\mathbb{Z})}^r \rightarrow \mathfrak{X}$  es un morfismo ádico, por 1.2.6.(3).

DEFINICIÓN 1.2.8. Sea  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  en  $\mathbf{Sf}$  e  $y \in \mathfrak{Y}$ . Definimos la *fibra de  $f$  en el punto  $y$*  como el esquema formal

$$f^{-1}(y) = \mathfrak{X} \times_{\mathfrak{Y}} \text{Spec}(k(y))$$

En particular, si  $\mathfrak{X} = \text{Spf}(B) \xrightarrow{f} \mathfrak{Y} = \text{Spf}(A)$  está en  $\mathbf{Sf}_{\text{af}}$  se tiene que  $f^{-1}(y) = \text{Spf}(B \widehat{\otimes}_A k(y))$ .

EJEMPLO 1.2.9. Sea  $\mathfrak{X} = \text{Spf}(A)$  en  $\mathbf{Sfn}_{\text{af}}$ . Si  $\mathbb{A}_{\mathfrak{X}}^r \xrightarrow{p} \mathfrak{X}$  es la proyección canónica del  $r$ -espacio formal afín sobre  $\mathfrak{X}$ , para todo  $x \in \mathbb{A}_{\mathfrak{X}}^r$  y para todo  $y = p(x)$  se tiene que

$$p^{-1}(y) = \text{Spf}(A\{\mathbf{T}\} \widehat{\otimes}_A k(y)) = \text{Spf}(A[\mathbf{T}] \widehat{\otimes}_A k(y)) = \text{Spec}(k(y)[\mathbf{T}])$$

Si consideramos  $\mathbb{D}_{\mathfrak{X}}^r \xrightarrow{q} \mathfrak{X}$  la proyección canónica del  $r$ -disco formal sobre  $\mathfrak{X}$ , dado  $x \in \mathbb{D}_{\mathfrak{X}}^r$  e  $y = q(x)$ , resulta que

$$q^{-1}(y) = \text{Spf}(A[[\mathbf{T}]] \widehat{\otimes}_A k(y)) = \text{Spf}(A[\mathbf{T}] \widehat{\otimes}_A k(y)) = \text{Spf}(k(y)[[\mathbf{T}]])$$

1.2.10. Sea  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  en  $\mathbf{Sfn}$  y consideremos  $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$  y  $\mathcal{K} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$  Ideales de definición con  $f^*(\mathcal{K})\mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \subset \mathcal{J}$ . Según 1.1.17, respecto a los Ideales de definición  $\mathcal{J}$  y  $\mathcal{K}$  el morfismo  $f$  se escribe

$$f = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} (X_n \xrightarrow{f_n} Y_n)$$

Entonces, de 1.1.21 resulta que

$$f^{-1}(y) = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} f_n^{-1}(y)$$

donde  $f_n^{-1}(y) = X_n \times_{Y_n} \text{Spec}(k(y))$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$ .

Si además  $f$  es ádico, de 1.2.6.(3) se deduce que  $f^{-1}(y)$  es un esquema (usual) y que  $f^{-1}(y) = f_n^{-1}(y)$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

NOTACIONES. Sea  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  en  $\mathbf{Sfn}$ ,  $x \in \mathfrak{X}$  e  $y = f(x)$  y consideremos  $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$  y  $\mathcal{K} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$  Ideales de definición tales que  $f^*(\mathcal{K})\mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \subset \mathcal{J}$ . A partir de ahora y, salvo que se exprese lo contrario, cuando nos refiramos a los anillos  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},x}$  y a  $\mathcal{O}_{\mathfrak{Y},y}$  estaremos considerando en ellos las topologías  $\mathcal{J}\mathcal{O}_{\mathfrak{X},x}$  y  $\mathcal{K}\mathcal{O}_{\mathfrak{Y},y}$ -ádicas, respectivamente. Y denotaremos por  $\widehat{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},x}}$  y  $\widehat{\mathcal{O}_{\mathfrak{Y},y}}$  los anillos completos de  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},x}$  y  $\mathcal{O}_{\mathfrak{Y},y}$  para las topologías  $\mathcal{J}\mathcal{O}_{\mathfrak{X},x}$  y  $\mathcal{K}\mathcal{O}_{\mathfrak{Y},y}$ -ádicas, respectivamente.

DEFINICIÓN 1.2.11. Sea  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  en  $\mathbf{Sfn}$ . Dado  $x \in \mathfrak{X}$  e  $y = f(x)$ , se define la *dimensión algebraica relativa de  $f$  en  $x$*  como

$$\dim_x f = \dim_x f^{-1}(y)$$

Si  $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$  y  $\mathcal{K} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$  son Ideales de definición tales que  $f^*(\mathcal{K})\mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \subset \mathcal{J}$ , resulta que

$$\dim_x f = \dim \mathcal{O}_{f^{-1}(y),x} = \dim \mathcal{O}_{\mathfrak{X},x} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{Y},y}} k(y) = \dim \widehat{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},x}} \otimes_{\widehat{\mathcal{O}_{\mathfrak{Y},y}}} k(y)$$

ya que la topología en  $\widehat{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},x}} \otimes_{\widehat{\mathcal{O}_{\mathfrak{Y},y}}} k(y)$  es la  $\mathcal{J}\widehat{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},x}}$ -ádica y, por lo tanto,  $\widehat{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},x}} \widehat{\otimes}_{\widehat{\mathcal{O}_{\mathfrak{Y},y}}} k(y) = \widehat{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},x}} \otimes_{\widehat{\mathcal{O}_{\mathfrak{Y},y}}} k(y)$ .

Por otro lado, se define la *dimensión topológica relativa de  $f$  en  $x \in \mathfrak{X}$*  como

$$\dim_{\text{top}_x} f = \dim_{\text{top}_x} f^{-1}(y)$$

Si  $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$  y  $\mathcal{K} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$  son Ideales de definición tales que  $f^*(\mathcal{K})\mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \subset \mathcal{J}$ , y  $X_0 \xrightarrow{f_0} Y_0$  es el morfismo inducido por estos ideales, se verifica que:

$$\dim_{\text{top}_x} f = \dim_x f_0^{-1}(y) = \dim_x f_0$$

1.2.12. Dado  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  en  $\text{Sfn}$  y  $x \in \mathfrak{X}$ , se tiene que  $\dim_x f \geq \dim_{\text{top}_x} f$ . Además, si  $f$  es un morfismo ádico por 1.2.10 se verifica la igualdad. Por ejemplo:

- (1) Si  $\mathbb{A}_{\mathfrak{X}}^r \xrightarrow{p} \mathfrak{X}$  es la proyección canónica del  $r$ -espacio formal afín sobre  $\mathfrak{X}$ , para todo  $x \in \mathbb{A}_{\mathfrak{X}}^r$  se tiene que

$$\dim_x p = \dim_{\text{top}_x} p = \dim k(y)[\mathbf{T}] = r$$

donde  $y = p(x)$ . Por el contrario, si consideramos  $\mathbb{D}_{\mathfrak{X}}^r \xrightarrow{q} \mathfrak{X}$  la proyección canónica del  $r$ -disco formal sobre  $\mathfrak{X}$ , un punto  $x \in \mathbb{D}_{\mathfrak{X}}^r$  e  $y = q(x)$  su imagen, resulta que

$$\dim_x q = \dim k(y)[[\mathbf{T}]] \underset{1.1.28}{=} r > \dim_{\text{top}_x} q = \dim k(y) = 0$$

- (2) Si  $X$  es un esquema usual noetheriano y  $X'$  es un subesquema cerrado de  $X$ , recordemos que el morfismo de compleción de  $X$  a lo largo de  $X'$ ,  $X_{/X'} \xrightarrow{\kappa} X$ , en general no es ádico. Sin embargo, para todo  $x \in X_{/X'}$  se verifica que

$$\dim_x \kappa = \dim k(x) = \dim_{\text{top}_x} \kappa = 0$$

**DEFINICIÓN 1.2.13.** [EGA I, (10.14.1) y (10.14.2)] Sea  $\mathfrak{X}$  un esquema formal localmente noetheriano e  $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$  un Ideal coherente. Si llamamos<sup>8</sup>  $\mathfrak{X}' := \text{Supp}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/\mathcal{I})$  se tiene que  $\mathfrak{X}' \subset \mathfrak{X}$  es un cerrado y que  $(\mathfrak{X}', (\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/\mathcal{I})|_{\mathfrak{X}'})$  es un esquema formal localmente noetheriano. Se dirá que  $\mathfrak{X}'$  es el *subesquema formal cerrado* de  $\mathfrak{X}$  definido por  $\mathcal{I}$  o, simplemente, el *subesquema cerrado* de  $\mathfrak{X}$  definido por  $\mathcal{I}$ .

1.2.14. Sea  $\mathfrak{X}$  en  $\text{Sfn}$ ,  $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$  un Ideal de definición y  $\mathfrak{X}' \subset \mathfrak{X}$  un subesquema cerrado. Entonces se verifica que  $\mathfrak{X}' = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} X'_n$  donde  $X'_n \subset X_n = (\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/\mathcal{J}^{n+1})$  es el subesquema cerrado definido por  $(\mathcal{J}^{n+1} + \mathcal{I})/\mathcal{J}^{n+1}$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

<sup>8</sup>[EGA I, (0.3.1.5)] Si  $\mathcal{F}$  es un haz sobre un espacio topológico  $X$ , el soporte de  $\mathcal{F}$  es  $\text{Supp}(\mathcal{F}) := \{x \in X \text{ tal que } \mathcal{F}_x \neq 0\}$

1.2.15. Análogamente al caso de esquemas, dado  $\mathfrak{X}$  en  $\text{Sfn}$  existe una correspondencia biunívoca entre los Ideales coherentes  $\mathcal{I}$  de  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$  y los subesquemas cerrados  $\mathfrak{X}' \hookrightarrow \mathfrak{X}$  dada por  $\mathfrak{X}' = \text{Supp}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/\mathcal{I})$ ,  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'} = (\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/\mathcal{I})|_{\mathfrak{X}'}$ .

En particular, sea  $\mathfrak{X} = \text{Spf}(A)$  donde  $A$  es un anillo  $J$ -ádico noetheriano. Dado un ideal  $I \subset A$  se verifica que  $A/I$  es un anillo  $J(A/I)$ -ádico y  $\mathfrak{X}' = \text{Spf}(A/I)$  es un subesquema cerrado de  $\mathfrak{X}$ .

DEFINICIÓN 1.2.16. [EGA I, p. 442] Un morfismo  $\mathfrak{Z} \xrightarrow{j} \mathfrak{X}$  en  $\text{Sfn}$  es un *encaje cerrado* si se factoriza como  $\mathfrak{Z} \xrightarrow{f} \mathfrak{X}' \hookrightarrow \mathfrak{X}$  donde  $f$  es un isomorfismo de  $\mathfrak{Z}$  en un subesquema cerrado  $\mathfrak{X}'$  de  $\mathfrak{X}$ .

PROPOSICIÓN 1.2.17. Dado  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  un morfismo ádico en  $\text{Sfn}$  las siguientes condiciones son equivalentes:

- (1) El morfismo  $f$  es un encaje cerrado
- (2) Dado  $\mathcal{K} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$  un Ideal de definición y  $\mathcal{J} = f^*(\mathcal{K})\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$  su extensión, el morfismo inducido  $X_0 \xrightarrow{f_0} Y_0$  es un encaje cerrado.
- (3) Dado  $\mathcal{K} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$  un Ideal de definición y  $\mathcal{J} = f^*(\mathcal{K})\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$  el Ideal de definición de  $\mathfrak{X}$  correspondiente, los morfismos inducidos  $X_n \xrightarrow{f_n} Y_n$ , son encajes cerrados, para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

DEMOSTRACIÓN. La equivalencia (1)  $\Leftrightarrow$  (2) es [EGA III<sub>1</sub>, (4.8.10)] y la equivalencia (2)  $\Leftrightarrow$  (3) es inmediata.  $\square$

DEFINICIÓN 1.2.18. Un morfismo  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  en  $\text{Sfn}$  se dice que es un *pseudo encaje cerrado* si dados  $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$  y  $\mathcal{K} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$  Ideales de definición tales que  $f^*(\mathcal{K})\mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \subset \mathcal{J}$ , los morfismos inducidos por  $f$ ,  $X_n \xrightarrow{f_n} Y_n$  son encajes cerrados, para todo  $n \in \mathbb{N}$ . En particular, si  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  es un pseudo encaje cerrado,  $f(\mathfrak{X})$  es un cerrado de  $\mathfrak{Y}$ .

Veamos que la definición no depende de los Ideales de definición escogidos. Para ello podemos suponer que  $\mathfrak{X} = \text{Spf}(A) \xrightarrow{f} \mathfrak{Y} = \text{Spf}(B)$  está en  $\text{Sfn}_{\text{af}}$  y que  $\mathcal{J} = J^{\Delta}$ ,  $\mathcal{K} = K^{\Delta}$ . Entonces dados  $\mathcal{J}' = J'^{\Delta} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ ,  $\mathcal{K}' = K'^{\Delta} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$  Ideales de definición tales que  $f^*(\mathcal{K}')\mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \subset \mathcal{J}'$ , existe  $n_0 > 0$  tal que  $J^{n_0} \subset J'$ ,  $K^{n_0} \subset K'$ . El morfismo  $B \rightarrow A$  induce los siguientes diagramas conmutativos

$$\begin{array}{ccc} B/K^{n_0(n+1)} & \longrightarrow & A/J^{n_0(n+1)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ B/K^{m+1} & \longrightarrow & A/J^{m+1} \end{array}$$

de donde se deduce que  $B/K^{m+1} \rightarrow A/J^{m+1}$  es sobreyectivo, para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Por lo tanto,  $(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/\mathcal{J}^{m+1}) \rightarrow (\mathfrak{Y}, \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}/\mathcal{K}^{m+1})$  es un encaje cerrado, para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

EJEMPLO 1.2.19. Dado  $X$  un esquema noetheriano y  $X' \subset X$  un subesquema cerrado dado por un Ideal  $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_X$ , por 1.1.13 y 1.1.17 se verifica

que

$$X_{/X'} \xrightarrow{\kappa} X = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} \left( (X', \mathcal{O}_X / \mathcal{I}^{n+1}) \xrightarrow{\kappa_n} (X, \mathcal{O}_X) \right)$$

y, por lo tanto, el morfismo de completación de  $X$  a lo largo de  $X'$  es un pseudo encaje cerrado.

Nótese que, un pseudo encaje cerrado ádico es un encaje cerrado. Sin embargo, para los pseudo encajes cerrados no se tiene la caracterización análoga a la Proposición 1.2.17 :

**EJEMPLO 1.2.20.** Dado  $K$  un cuerpo, consideremos la proyección canónica  $\mathbb{D}_{\text{Spec}(K)}^1 \xrightarrow{p} \text{Spec}(K)$ . Si tomamos  $[[T]]^\Delta$  como Ideal de definición de  $\mathbb{D}_{\text{Spec}(K)}^1$  se verifica que  $p_0 = 1_{\text{Spec}(K)}$  es un encaje cerrado. Sin embargo, los morfismos  $\text{Spec}(K[T]/\langle T \rangle^{n+1}) \xrightarrow{p_n} \text{Spec}(K)$  no son encajes cerrados, para todo  $n > 0$  y, por lo tanto,  $p$  no es un pseudo encaje cerrado.

**PROPIEDADES 1.2.21.** Sean  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  y  $\mathfrak{Y} \xrightarrow{g} \mathfrak{S}$  dos morfismos en Sfn. Se cumple que:

- (1) Si  $f$  y  $g$  son (pseudo) encajes cerrados entonces  $g \circ f$  es un (pseudo) encaje cerrado.
- (2) Si  $f$  es un (pseudo) encaje cerrado, dado  $\mathfrak{Y}' \xrightarrow{h} \mathfrak{Y}$  en Sfn se tiene que  $\mathfrak{X}_{\mathfrak{Y}'} = \mathfrak{X} \times_{\mathfrak{Y}} \mathfrak{Y}'$  está en Sfn y que  $\mathfrak{X}_{\mathfrak{Y}'} \xrightarrow{f'} \mathfrak{Y}'$  es un (pseudo) encaje cerrado.

**DEMOSTRACIÓN.** Por 1.2.6 basta probar las propiedades para los pseudo encajes cerrados. Para demostrar la propiedad (1) sean  $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ ,  $\mathcal{K} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$  y  $\mathcal{L} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{S}}$  Ideales de definición con  $f^*(\mathcal{K})\mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \subset \mathcal{J}$ ,  $g^*(\mathcal{L})\mathcal{O}_{\mathfrak{Y}} \subset \mathcal{K}$  y las correspondientes expresiones para  $f$  y  $g$  como límite directo de morfismos de esquemas

$$f = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} (X_n \xrightarrow{f_n} Y_n) \quad g = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} (Y_n \xrightarrow{g_n} S_n)$$

Por 1.1.18 se tiene que  $g \circ f = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} g_n \circ f_n$  y entonces la afirmación es consecuencia de que los encajes cerrados en Sch son estables para la composición.

Para demostrar (2), sea  $\mathcal{K}' \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}'}$  un Ideal de definición con  $h^*(\mathcal{K}')\mathcal{O}_{\mathfrak{Y}} \subset \mathcal{K}$  y tal que, aplicando 1.1.17,  $h = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} (Y'_n \xrightarrow{h_n} Y_n)$ . Entonces, por 1.1.21 se tiene que

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{X}_{\mathfrak{Y}'} & \xrightarrow{f'} & \mathfrak{Y}' \\ \downarrow & & \downarrow h \\ \mathfrak{X} & \xrightarrow{f} & \mathfrak{Y} \end{array} = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} \left( \begin{array}{ccc} X_n \times_{Y_n} Y'_n & \xrightarrow{f'_n} & Y'_n \\ \downarrow & & \downarrow h_n \\ X_n & \xrightarrow{f_n} & Y_n \end{array} \right)$$

Por hipótesis  $f_n$  es un encaje cerrado y como los encajes cerrados en  $\text{Sch}$  son estables por cambio de base se tiene que  $f'_n$  es un encaje cerrado de esquemas noetherianos,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . Por último comprobemos que  $\mathfrak{X}_{\mathfrak{Y}}$  está en  $\text{Sfn}$ . Como la cuestión es local, podemos suponer que  $\mathfrak{X} = \text{Spf}(A)$ ,  $\mathfrak{Y} = \text{Spf}(B)$ ,  $\mathfrak{Y}' = \text{Spf}(B')$  y que los Ideales de definición son de la forma  $\mathcal{J} = J^\Delta$ ,  $\mathcal{K} = K^\Delta$  y  $\mathcal{K}' = K'^\Delta$  para ciertos ideales  $J \subset A$ ,  $K \subset B$  y  $K' \subset B'$ . Se tiene que  $\mathfrak{X}_{\mathfrak{Y}'} = \text{Spf}(A')$  donde  $A' := A \widehat{\otimes}_B B'$  es el completado de  $A \otimes_B B'$  respecto a la topología  $J \cdot (A \otimes_B B') + K' \cdot (A \otimes_B B')$ -ádica. Veamos que  $A' = A \widehat{\otimes}_B B'$  es noetheriano. Si ponemos  $J' = J(A \widehat{\otimes}_B B') + K'(A \widehat{\otimes}_B B')$ , el morfismo correspondiente al encaje cerrado  $f'_0$  vía la equivalencia de categorías (1.1.10.1),  $B'/K' \rightarrow A'/J'$  es sobreyectivo. Entonces, por [E, Theorem 7.16]  $B' \rightarrow A'$  se factoriza por un morfismo  $B'[[T_1, T_2, \dots, T_r]] \rightarrow A'$  que es sobreyectivo, con lo cual  $A'$  es un anillo noetheriano.  $\square$

DEFINICIÓN 1.2.22. [EGA I, (10.15.1)] Dado  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  en  $\text{Sf}$ , el morfismo  $\mathfrak{X} \xrightarrow{(1_{\mathfrak{X}}, 1_{\mathfrak{X}})_{\mathfrak{Y}}} \mathfrak{X} \times_{\mathfrak{Y}} \mathfrak{X}$  dado por la propiedad universal del producto fibrado, se llama *morfismo diagonal* y se denota por  $\Delta_{\mathfrak{X}}$ . Se dice que  $f$  es *separado* si  $\Delta_{\mathfrak{X}}(\mathfrak{X}) \subset \mathfrak{X} \times_{\mathfrak{Y}} \mathfrak{X}$  es un cerrado.

1.2.23. [EGA I, (10.15.2)] Si  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  está en  $\text{Sfn}$  y  $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$  y  $\mathcal{K} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$  son Ideales de definición con  $f^*(\mathcal{K})\mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \subset \mathcal{J}$  se tiene que

$$f \text{ es separado} \Leftrightarrow X_0 \xrightarrow{f_0} Y_0 \text{ es separado}$$

Aplicando [EGA I, (5.3.1)], 1.1.18 y 1.1.21 se deduce que los morfismos separados en  $\text{Sfn}$  son estables para la composición y para cambio de base. Además, se verifica que todo (pseudo) encaje cerrado es separado.

Por otro lado, en [EGA I, (10.15.5)] se prueba que, si  $\mathfrak{X} \times_{\mathfrak{Y}} \mathfrak{X}$  está en  $\text{Sfn}$ ,  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  es separado si, y sólo si,  $\Delta_{\mathfrak{X}}$  es un encaje cerrado.

DEFINICIÓN 1.2.24. Dado  $(\mathfrak{Y}, \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}})$  en  $\text{Sfn}$  y  $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{Y}$  un abierto, se verifica que  $(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}|_{\mathfrak{U}})$  es un esquema formal noetheriano ([EGA I, (10.4.4)]) y se dice que  $\mathfrak{U}$  es un *subesquema abierto de  $\mathfrak{Y}$* . Un morfismo  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  se dice que es un *encaje abierto* si existe  $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{Y}$  un abierto tal que  $f$  se factoriza en

$$\mathfrak{X} \xrightarrow{g} \mathfrak{U} \hookrightarrow \mathfrak{Y}$$

donde  $g$  es un isomorfismo.

OBSERVACIÓN. Es conocido que dado  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} S$  en  $\text{Sch}$  con  $f$  un encaje cerrado y  $g$  un encaje abierto el morfismo  $g \circ f$  se factoriza en  $g' \circ f'$  donde  $g'$  es un encaje cerrado y  $f'$  es un encaje abierto. Sin embargo, en  $\text{Sfn}$  el resultado análogo no es cierto y puede consultarse un contraejemplo en [AJL2].



DEFINICIÓN 1.2.25. Un morfismo  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  en  $\text{Sfn}$  es *radical* si dados  $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$  y  $\mathcal{K} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$  Ideales de definición tales que  $f^*(\mathcal{K})\mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \subset \mathcal{J}$  el morfismo de esquemas inducido  $X_0 \xrightarrow{f_0} Y_0$  es radical<sup>9</sup>.

Veamos que la definición es independiente de los Ideales de definición escogidos. En efecto, dados  $\mathcal{J}' \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$  y  $\mathcal{K}' \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$  Ideales de definición tales que  $f^*(\mathcal{K}')\mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \subset \mathcal{J}'$  el morfismo de esquemas  $X'_0 \xrightarrow{f'_0} Y'_0$  es inyectivo ya que como aplicación de conjuntos coincide con  $f_0$ . Además, dado  $x \in \mathfrak{X}$  se tiene que los cuerpos residuales de los anillos locales  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},x}$ ,  $\mathcal{O}_{X_0,x}$  y  $\mathcal{O}_{X'_0,x}$  coinciden, de donde se sigue que  $f'_0$  es un morfismo radical.

1.2.26. De [EGA I, (3.7.3) y (3.7.6)] se deduce que:

- (1) Los morfismos radicales son estables para la composición de morfismos y para cambio de base noetheriano.
- (2) Todo monomorfismo es un morfismo radical. En particular, los encajes abiertos, los encajes cerrados y los pseudo encajes cerrados son morfismos radicales.

### 1.3. Condiciones de finitud de morfismos de esquemas formales

Esta sección se ocupa de las condiciones de finitud para morfismos en  $\text{Sfn}$ , que generalizan las propiedades análogas en  $\text{Sch}$ . En la clase de los morfismos ádicos se estudian los morfismos de tipo finito y los morfismos finitos, definidos en [EGA I, §10.13] y [EGA III<sub>1</sub>, §4.8]. En la amplia clase de los morfismos no ádicos estudiaremos los morfismos de pseudo tipo finito y los morfismos pseudo finitos (véase, por ejemplo, [AJL1, p. 7]). Además, y generalizando a los morfismo cuasifinitos en  $\text{Sch}$ , se definen los morfismos pseudo cuasifinitos y los cuasirevestimientos y se establecen sus propiedades básicas. Al final de la sección se dan los sorites para una propiedad  $\mathcal{P}$  de morfismos en  $\text{Sfn}$  (Proposición 1.3.15).

DEFINICIÓN 1.3.1. Un morfismo  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  en  $\text{Sfn}$  es de *pseudo tipo finito* (*pseudo finito*) si existen  $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$  y  $\mathcal{K} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$  Ideales de definición con  $f^*(\mathcal{K})\mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \subset \mathcal{J}$  y tales que el morfismo de esquemas inducido,  $X_0 \xrightarrow{f_0} Y_0$  es de tipo finito (finito, respectivamente). Si además  $f$  es ádico se dice que es de *tipo finito* (*finito*, respectivamente).

Observemos que si  $f$  está en  $\text{Sch}$  la definiciones anteriores coinciden con las conocidas de morfismo de tipo finito y de morfismo finito.

PROPIEDADES 1.3.2. Sea  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  en  $\text{Sfn}$ .

- (1) El morfismo  $f$  es de pseudo tipo finito si, y sólo si, para cada  $y \in \mathfrak{Y}$ , existe  $\mathfrak{V} \subset \mathfrak{Y}$  un abierto afín y existe  $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{X}$  abierto afín con  $x \in \mathfrak{U}$

<sup>9</sup>[EGA I, (3.7.2)] Un morfismo de esquemas  $X \xrightarrow{g} Y$  es radical si satisface las siguientes condiciones equivalentes: 1) es universalmente inyectivo 2) es inyectivo y para todo  $x \in X$ , la extensión de cuerpos  $k(x)|k(g(x))$  es radical.

y  $f(\mathfrak{U}) \subset \mathfrak{Y}$  de modo que  $f|_{\mathfrak{U}}$  se factoriza en

$$\mathfrak{U} \xrightarrow{j} \mathbb{D}_{\mathbb{A}_{\mathfrak{X}}}^s \xrightarrow{p} \mathfrak{Y}$$

donde  $r, s \in \mathbb{N}$ ,  $j$  es un encaje cerrado y  $p$  es la proyección canónica.

- (2) El morfismo  $f$  es de tipo finito si, y sólo si, para cada  $y \in \mathfrak{Y}$ , existe  $\mathfrak{V} \subset \mathfrak{Y}$  un abierto afín y existe  $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{X}$  abierto afín con  $x \in \mathfrak{X}$  y  $f(\mathfrak{U}) \subset \mathfrak{V}$  de modo que  $f|_{\mathfrak{U}}$  se factoriza en

$$\mathfrak{U} \xrightarrow{j} \mathbb{A}_{\mathbb{A}_{\mathfrak{Y}}}^r \xrightarrow{p} \mathfrak{Y}$$

donde  $r \in \mathbb{N}$ ,  $j$  es un encaje cerrado y  $p$  es la proyección canónica.

- (3) El morfismo  $f$  es pseudo finito si, y sólo si, para cada  $y \in \mathfrak{Y}$ , existe  $\mathfrak{V} \subset \mathfrak{Y}$  un abierto afín con  $f^{-1}(\mathfrak{V}) = \mathfrak{U} \subset \mathfrak{X}$  abierto afín y existe  $s \in \mathbb{N}$  tal que  $f|_{\mathfrak{U}}$  se factoriza en

$$\mathfrak{U} \xrightarrow{f'} \mathbb{D}_{\mathbb{A}_{\mathfrak{Y}}}^s \xrightarrow{p} \mathfrak{Y}$$

donde  $f'$  es un morfismo finito y  $p$  es la proyección canónica (cf. [AJL1, p. 15]).

- (4) El morfismo  $f$  es finito si, y sólo si, para cada  $y \in \mathfrak{Y}$ , existe  $\mathfrak{V} \subset \mathfrak{Y}$  un abierto afín con  $f^{-1}(\mathfrak{V}) = \mathfrak{U} \subset \mathfrak{X}$  abierto afín y tal que  $\Gamma(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$  es un  $\Gamma(\mathfrak{V}, \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}})$ -módulo de tipo finito.

DEMOSTRACIÓN. Como son propiedades locales podemos suponer que  $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A) \xrightarrow{f} \mathfrak{Y} = \mathrm{Spf}(B)$  está en  $\mathrm{Sfn}_{\mathrm{af}}$ . Dados  $J \subset A$  y  $K \subset B$  ideales de definición tales que  $KA \subset J$  sea  $X_0 = \mathrm{Spec}(A/J) \xrightarrow{f_0} Y_0 = \mathrm{Spec}(B/K)$  el morfismo inducido por  $f$ .

Probemos la propiedad (1). Como  $f$  es de pseudo tipo finito, existe una presentación

$$\frac{B}{K} \hookrightarrow \frac{B}{K}[T_1, T_2, \dots, T_r] \xrightarrow{\varphi_0} \frac{A}{J}$$

Este morfismo se levanta a un homomorfismo de anillos

$$B \hookrightarrow B[T_1, T_2, \dots, T_r] \rightarrow A$$

y que, a su vez, se extiende a un morfismo continuo

$$B \hookrightarrow B\{\mathbf{T}\}[[\mathbf{Z}]] := B\{T_1, T_2, \dots, T_r\}[[Z_1, Z_2, \dots, Z_s]] \xrightarrow{\varphi} A \quad (1.3.2.3)$$

de modo que las imágenes de los  $Z_i$  en  $A$  generan  $J$ . Se comprueba fácilmente que el morfismo de módulos graduados asociado a  $\varphi$

$$\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \frac{(K\{\mathbf{T}\}[[\mathbf{Z}]] + [[\mathbf{Z}]]^n)}{(K\{\mathbf{T}\}[[\mathbf{Z}]] + [[\mathbf{Z}]]^{n+1})} \xrightarrow{\mathrm{gr}(\varphi)} \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \frac{J^n}{J^{n+1}}$$

es sobreyectivo y, por lo tanto,  $\varphi$  también es sobreyectivo ([B1, III, §2.8, Corollary 2]).

Demostremos (3). Por hipótesis, existe un epimorfismo de  $B/K$ -módulos

$$\bigoplus^t \frac{B}{K} \xrightarrow{\varphi_0} \frac{A}{J}$$

para cierto  $t \in \mathbb{N}$ . Este epimorfismo se levanta a un morfismo continuo de  $B$ -módulos

$$\bigoplus^t B \rightarrow A$$

que, a su vez, se extiende a un morfismo de  $B$ -módulos topológicos

$$\bigoplus^t B[[Z_1, Z_2, \dots, Z_s]] \xrightarrow{\varphi} A \quad (1.3.2.4)$$

de modo que las imágenes de los  $Z_i$  en  $A$  generan  $J$ . Del hecho de que  $\varphi_0$  sea sobreyectivo se deduce que  $\varphi$  también ([**B1**, III, §2.11, Proposition 14]).

En los casos (2) y (4)  $KA = J$  y, por lo tanto  $s = 0$ . Así, si  $f$  es de tipo finito la factorización (1.3.2.3) se escribe

$$B \rightarrow B\{T_1, T_2, \dots, T_r\} \rightarrow A$$

y se corresponde con la dada en [**EGA I**, (10.13.1)]. Cuando  $f$  es finito la factorización (1.3.2.4) se escribe

$$\bigoplus^r B \rightarrow A$$

y se corresponde con la dada en [**EGA III**<sub>1</sub>, (4.8.1)]. □

1.3.3. Sea  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  un morfismo en  $\text{Sfn}$  de pseudo tipo finito (o pseudo finito). Como consecuencia de las propiedades anteriores se verifica que, para todo par de Ideales de definición  $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$  y  $\mathcal{K} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$  tales que  $f^*(\mathcal{K}) \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \subset \mathcal{J}$ , el morfismo de esquemas inducido  $X_0 \xrightarrow{f_0} Y_0$  es de tipo finito (o finito, respectivamente).

OBSERVACIÓN. En la afirmación c) de la caracterización de los morfismos finitos de esquemas formales dada en [**EGA III**<sub>1</sub>, (4.8.1)] debe añadirse la hipótesis de que  $f$  es un morfismo ádico.

PROPIEDADES 1.3.4. Dados  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  y  $\mathfrak{Y} \xrightarrow{g} \mathfrak{Z}$  en  $\text{Sfn}$  se tienen las siguientes propiedades:

- (1) Si  $f$  y  $g$  son morfismos de (pseudo) tipo finito, el morfismo  $g \circ f$  es de (pseudo) tipo finito.
- (2) Si  $f$  y  $g$  son morfismos (pseudo) finitos, el morfismo  $g \circ f$  es (pseudo) finito.
- (3) Si  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  es un morfismo de (pseudo) tipo finito, dado  $\mathfrak{Y}' \xrightarrow{h} \mathfrak{Y}$  un morfismo en  $\text{Sfn}$  se tiene que  $\mathfrak{X} \times_{\mathfrak{Y}} \mathfrak{Y}'$  está en  $\text{Sfn}$  y que  $\mathfrak{X}_{\mathfrak{Y}'} \xrightarrow{f'} \mathfrak{Y}'$  es de (pseudo) tipo finito.
- (4) Si  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  es un morfismo (pseudo) finito, dado  $\mathfrak{Y}' \xrightarrow{h} \mathfrak{Y}$  un morfismo en  $\text{Sfn}$  se tiene que  $\mathfrak{X}_{\mathfrak{Y}'} \xrightarrow{f'} \mathfrak{Y}'$  es (pseudo) finito.

DEMOSTRACIÓN. Por 1.2.6 es suficiente probar las propiedades en el caso pseudo. Entonces, las afirmaciones (1) y (2) se deducen de 1.1.18 y de

los correspondientes sorites en  $\text{Sch}$  de morfismos de tipo finito y morfismos finitos.

Para demostrar (3) y (4), por 1.1.21 y por los sorites en  $\text{Sch}$  de morfismos de tipo finito y morfismos finitos, es suficiente probar que si  $f$  es un morfismo de pseudo tipo finito entonces  $\mathfrak{X} \times_{\mathfrak{Y}} \mathfrak{Y}'$  está en  $\text{Sfn}$ . Para ello, podemos suponer que  $\mathfrak{X} = \text{Spf}(A)$ ,  $\mathfrak{Y} = \text{Spf}(B)$  e  $\mathfrak{Y}' = \text{Spf}(B')$  con  $J \subset A$ ,  $K \subset B$  y  $K' \subset B'$  ideales de definición. Veamos que  $A' = A \widehat{\otimes}_B B'$  es noetheriano. Por hipótesis, se tiene que  $B/K \rightarrow A/J$  es de tipo finito. Entonces, por cambio de base, resulta que  $B'/K' \rightarrow A/J \otimes_{B/K} B'/K'$  es de tipo finito y, como  $A' = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} (A/J^{n+1} \otimes_{B/K^{n+1}} B'/K'^{n+1})$ , análogamente a

lo hecho en la demostración de la Propiedad 1.3.2.(1), se tiene un morfismo  $B'\{T_1, T_2, \dots, T_r\}[[Z_1, Z_2, \dots, Z_s]] \rightarrow A'$  sobreyectivo. Entonces  $A'$  es un anillo noetheriano y, por lo tanto,  $\text{Spf}(A')$  está en  $\text{Sfn}$ .  $\square$

**DEFINICIÓN 1.3.5.** Sea  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  un morfismo en  $\text{Sfn}$  de pseudo tipo finito. Se dice que  $f$  es *pseudo cuasifinito* si existen  $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$  y  $\mathcal{K} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$  Ideales de definición con  $f^*(\mathcal{K})\mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \subset \mathcal{J}$  y tales que  $f_0$  es cuasifinito<sup>10</sup>. Diremos que  $f$  es *pseudo cuasifinito en*  $x \in \mathfrak{X}$  si existe  $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{X}$  un abierto con  $x \in \mathfrak{U}$  tal que  $f|_{\mathfrak{U}}$  es pseudo cuasifinito.

Nótese que si  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  es un morfismo en  $\text{Sfn}$  pseudo cuasifinito entonces, para todo par de Ideales de definición  $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$  y  $\mathcal{K} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$  tal que  $f^*(\mathcal{K}) \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \subset \mathcal{J}$ , el morfismo de esquemas inducido  $X_0 \xrightarrow{f_0} Y_0$  es cuasifinito.

**PROPIEDADES 1.3.6.** Los morfismos pseudo cuasifinitos verifican las siguientes propiedades:

- (1) Los encajes cerrados, los pseudo encajes cerrados y los encajes abiertos son pseudo cuasifinitos.
- (2) Si  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  y  $\mathfrak{Y} \xrightarrow{g} \mathfrak{Z}$  son dos morfismos pseudo cuasifinitos, el morfismo  $g \circ f$  es pseudo cuasifinito.
- (3) Si  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  es pseudo cuasifinito, dado  $\mathfrak{Y}' \xrightarrow{h} \mathfrak{Y}$  un morfismo en  $\text{Sfn}$  se tiene que  $\mathfrak{X}_{\mathfrak{Y}'} \xrightarrow{f'} \mathfrak{Y}'$  es pseudo cuasifinito.

**DEMOSTRACIÓN.** La demostración es consecuencia inmediata de las propiedades análogas en  $\text{Sch}$ .  $\square$

En  $\text{Sch}$  se verifica que un morfismo es étale si, y sólo si, es liso y cuasifinito. Sin embargo, se verá que en  $\text{Sfn}$  no todo morfismo liso y pseudo cuasifinito es étale (Capítulo 3). De ahí que sea necesario definir una noción más fuerte que la de morfismo pseudo cuasifinito y que generalice a los morfismos cuasifinitos en  $\text{Sch}$ : los cuasirevestimientos.

<sup>10</sup>[**EGA I**, (6.11.3)] Sea  $X \xrightarrow{f} Y$  un morfismo de esquemas de tipo finito. El morfismo  $f$  es cuasifinito si satisface las siguientes condiciones equivalentes: 1) Todo punto  $x \in X$  es aislado en  $f^{-1}(f(x))$ . 2) Para todo  $x \in X$ , el esquema  $f^{-1}(f(x))$  es finito sobre  $k(x)$ . 3) Para todo  $x \in X$ ,  $\mathcal{O}_{X,x} \otimes_{\mathcal{O}_{Y,f(x)}} k(f(x))$  es  $k(f(x))$ -finito.

DEFINICIÓN 1.3.7. Sea  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  en  $\text{Sfn}$  un morfismo de pseudo tipo finito. El morfismo  $f$  es un *cuasirevestimiento* si para todo en  $x \in \mathfrak{X}$ ,  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},x} \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{Y},f(x)}} k(f(x))$  es un  $k(f(x))$ -módulo de tipo finito. Se dirá que  $f$  es un *cuasirevestimiento en  $x \in \mathfrak{X}$*  si existe  $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{X}$  un abierto con  $x \in \mathfrak{U}$  tal que  $f|_{\mathfrak{U}}$  es un cuasirevestimiento.

Observemos que dados  $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$  y  $\mathcal{K} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$  Ideales de definición tales que  $f^*(\mathcal{J})\mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \subset \mathcal{K}$ , para todo  $x \in \mathfrak{X}$  resulta que

$$\mathcal{O}_{\mathfrak{X},x} \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{Y},f(x)}} k(f(x)) = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{O}_{X_n,x} \otimes_{\mathcal{O}_{Y_n,f(x)}} k(f(x))$$

EJEMPLO 1.3.8. Si  $X$  es un esquema localmente noetheriano y  $X' \subset X$  es un subesquema cerrado el morfismo de completación  $\mathfrak{X} = X/X' \xrightarrow{\kappa} X$  es un cuasirevestimiento. De hecho, para todo  $x \in \mathfrak{X}$  se tiene que

$$\mathcal{O}_{\mathfrak{X},x} \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{X,\kappa(x)}} k(\kappa(x)) = k(\kappa(x))$$

PROPIEDADES 1.3.9. Los cuasirevestimientos verifican las siguientes propiedades:

- (1) Los encajes cerrados, los pseudo encajes cerrados y los encajes abiertos son cuasirevestimientos.
- (2) Si  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  y  $\mathfrak{Y} \xrightarrow{g} \mathfrak{S}$  son dos cuasirevestimientos, el morfismo  $g \circ f$  es un cuasirevestimiento.
- (3) Si  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  es un cuasirevestimiento, dado  $\mathfrak{Y}' \xrightarrow{h} \mathfrak{Y}$  un morfismo en  $\text{Sfn}$  se tiene que  $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}' \xrightarrow{f'} \mathfrak{Y}'$  es un cuasirevestimiento.

DEMOSTRACIÓN. Es inmediata.  $\square$

PROPIEDAD 1.3.10. Si  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  es un cuasirevestimiento en  $x \in \mathfrak{X}$  entonces:

$$\dim_x f = 0$$

DEMOSTRACIÓN. Es consecuencia de que  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},x} \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{Y},f(x)}} k(f(x))$  es artiniiano.  $\square$

PROPOSICIÓN 1.3.11. Sea  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  en  $\text{Sfn}$  un morfismo de pseudo tipo finito. Si  $f$  es un cuasirevestimiento, entonces  $f$  es pseudo cuasifinito. Y si  $f$  es ádico se verifica el recíproco.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que  $f$  es un cuasirevestimiento y sean  $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$  y  $\mathcal{K} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$  Ideales de definición tales que  $f^*(\mathcal{K})\mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \subset \mathcal{J}$ . Para todo  $x \in \mathfrak{X}$  y para todo  $y = f(x)$ ,  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},x} \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{Y},y}} k(y)$  es un  $k(y)$ -módulo finito y, por lo tanto,

$$\frac{\mathcal{O}_{X_0,x}}{\mathfrak{m}_{Y_0,y}\mathcal{O}_{X_0,x}} = \frac{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},x}}{\mathcal{J}\mathcal{O}_{\mathfrak{X},x}} \otimes_{\mathcal{O}_{Y_0,y}} k(y)$$

es  $k(y)$ -finito, de donde se sigue que  $f$  es pseudo cuasifinito.

Si  $f$  es un morfismo pseudo cuasifinito ádico, en 1.2.10 hemos visto que  $f^{-1}(y) = f_0^{-1}(y)$  y, por lo tanto,

$$\mathcal{O}_{X_0,x}/\mathfrak{m}_{Y_0,y}\mathcal{O}_{X_0,x} = \mathcal{O}_{\mathfrak{X},x} \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{Y},y}} k(y)$$

para todo  $x \in \mathfrak{X}$  con  $y = f(x)$ . De donde se sigue que  $f$  es un cuasirevestimiento.  $\square$

**COROLARIO 1.3.12.** *Todo morfismo  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  finito en  $\mathbf{Sfn}$  es un cuasirevestimiento.*

**DEMOSTRACIÓN.** Dados  $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$  y  $\mathcal{K} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$  Ideales de definición tales que  $f^*(\mathcal{K})\mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \subset \mathcal{J}$  por hipótesis se tiene que  $X_0 \xrightarrow{f_0} Y_0$  es finito y, por lo tanto, cuasifinito. Como además  $f$  es ádico el resultado es consecuencia de la proposición anterior.  $\square$

Sin embargo y, tal como muestra el siguiente ejemplo, no todo morfismo pseudo finito es un cuasirevestimiento y, por lo tanto, pseudo cuasifinito no implica cuasirevestimiento.

**EJEMPLO 1.3.13.** La proyección canónica  $\mathbb{D}_{\mathfrak{X}}^r \xrightarrow{p} \mathfrak{X}$  no es un cuasirevestimiento ya que  $\dim_x p_{1.2.12.(1)} = r > 0$ , para todo  $x \in \mathfrak{X}$ . Pero el morfismo de esquemas  $p_0 = 1_{X_0}$  es finito.

1.3.14. En resumen, se tiene el siguiente diagrama de implicaciones estrictas (con las condiciones que implican morfismo ádico en cursiva):

$$\begin{array}{ccccc} \text{encaje cerrado} & \Rightarrow & \text{finito} & \Rightarrow & \text{cuasirevestimiento} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \text{pseudo encaje cerrado} & \Rightarrow & \text{pseudo finito} & \Rightarrow & \text{pseudo cuasifinito} \end{array}$$

**CUESTIÓN ABIERTA 1.** En  $\mathbf{Sch}$  el Teorema Principal de Zariski dice que todo morfismo cuasifinito se factoriza en un encaje abierto y un morfismo finito. En  $\mathbf{Sfn}$ , ¿es todo cuasirevestimiento la composición de un encaje abierto y de un morfismo pseudo finito? Bastaría probarlo en el caso ádico pero, ni siquiera en ese caso conocemos la respuesta.

En la proposición siguiente se estudian los sorites básicos de una propiedad  $\mathcal{P}$  de morfismos de pseudo tipo finito en  $\mathbf{Sfn}$ .

**PROPOSICIÓN 1.3.15.** *Sea  $\mathcal{P}$  una propiedad de morfismos de pseudo tipo finito en  $\mathbf{Sfn}$  y consideremos las siguientes afirmaciones:*

- (1) *Todo encaje cerrado verifica  $\mathcal{P}$ .*
- (2) *Todo morfismo  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  en  $\mathbf{Sfn}$  ádico y tal que, para todo  $\mathcal{K} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$  Ideal de definición y  $\mathcal{J} = f^*(\mathcal{K})\mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$  el morfismo inducido  $X_0 \xrightarrow{f_0} Y_0$  es un encaje, verifica  $\mathcal{P}$ .*
- (3) *La propiedad  $\mathcal{P}$  es estable para la composición de morfismos y para cambio de base en  $\mathbf{Sfn}$ .*
- (4) *La propiedad  $\mathcal{P}$  es estable para el producto de morfismos.*
- (5) *Dado  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  un morfismo en  $\mathbf{Sfn}$  de pseudo tipo finito y  $\mathfrak{Y} \xrightarrow{g} \mathfrak{S}$  un morfismo de pseudo tipo finito y separado en  $\mathbf{Sfn}$ , si  $g \circ f$  verifica  $\mathcal{P}$ , entonces  $f$  también.*

- (6) Sean  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  y  $\mathfrak{Y} \xrightarrow{g} \mathfrak{S}$  dos morfismos de pseudo tipo finito. Si  $g \circ f$  verifica  $\mathcal{P}$ , entonces  $f$  también.
- (7) Sea  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  en  $\text{Sfn}$  y consideremos  $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$  y  $\mathcal{K} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$  Ideales de definición con  $f^*(\mathcal{K})\mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \subset \mathcal{J}$  tal que  $f = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} (X_n \xrightarrow{f_n} Y_n)$ . Si  $f$  verifica la propiedad  $\mathcal{P}$ , entonces  $f_n$  verifica  $\mathcal{P}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Entonces se tienen las siguientes implicaciones:

- (3)  $\Rightarrow$  (4)  
 (1), (3)  $\Rightarrow$  (5), (7)  
 (2), (3)  $\Rightarrow$  (6), (7)

DEMOSTRACIÓN. La prueba de (3)  $\Rightarrow$  (4) se hace igual que en el caso de esquemas (cf. [GD, (5.5.12)]). La implicación (1), (3)  $\Rightarrow$  (5) es análoga a la del caso de esquemas utilizando 1.3.4.(1), 1.3.4.(3) y [EGA I, (10.15.4)]. Para ver que (1), (3)  $\Rightarrow$  (7) consideremos los siguientes diagramas conmutativos:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{X} & \xrightarrow{f} & \mathfrak{Y} \\ i_n \uparrow & & \uparrow j_n \\ X_n & \xrightarrow{f_n} & Y_n \end{array}$$

donde  $i_n, j_n$  son los encajes cerrados canónicos,  $\forall n \geq 0$ . De (1) y (3) se deduce que  $f \circ i_n = j_n \circ f_n$  verifica  $\mathcal{P}$  y entonces, como todo encaje cerrado es un morfismo separado, el resultado es consecuencia de (5).

Por otro lado, (2)  $\Rightarrow$  (1) y entonces por lo demostrado antes se tiene que (2), (3)  $\Rightarrow$  (4), (7). Finalmente, veamos que (2), (3)  $\Rightarrow$  (6). Sea  $\Gamma_f$  el único morfismo que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} \mathfrak{X} & & & & \\ & \searrow \Gamma_f & & \searrow f & \\ & & \mathfrak{X} \times_{\mathfrak{S}} \mathfrak{Y} & \xrightarrow{h} & \mathfrak{Y} \\ & \searrow 1_{\mathfrak{X}} & \downarrow & & \downarrow g \\ & & \mathfrak{X} & \xrightarrow{g \circ f} & \mathfrak{S} \end{array}$$

donde el cuadrado es cartesiano. Consideremos  $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}, \mathcal{K} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$  y  $\mathcal{L} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{S}}$  Ideales de definición con  $f^*(\mathcal{K})\mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \subset \mathcal{J}, g^*(\mathcal{L})\mathcal{O}_{\mathfrak{Y}} \subset \mathcal{K}$  y escribamos  $f = \varinjlim_{i \in \mathbb{N}} X_n \xrightarrow{f_n} Y_n, g = \varinjlim_{i \in \mathbb{N}} Y_n \xrightarrow{g_n} S_n$  respecto a estos ideales. Si para

cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\Gamma_{f_n}$  es el único morfismo que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 X_n & & & & \\
 \Gamma_{f_n} \searrow & & f_n \searrow & & \\
 & X_n \times S_n & & Y_n & \\
 1_{X_n} \searrow & \downarrow & & \downarrow & \\
 & X_n & & S_n & \\
 & \xrightarrow{g_n \circ f_n} & & & 
 \end{array}$$

donde el cuadrado es cartesiano, se verifica que

$$\Gamma_f = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} \Gamma_{f_n}$$

El morfismo  $\Gamma_f$  es ádico y, como  $\Gamma_{f_n}$  es un encaje, para todo  $n \in \mathbb{N}$  (cf. [EGA I, (5.1.4)]) por (2) se tiene que  $\Gamma_f$  verifica  $\mathcal{P}$ . Ahora bien, como  $g \circ f$  tiene la propiedad  $\mathcal{P}$  entonces por (3)  $h$  también y, de nuevo por (3) resulta que  $f = h \circ \Gamma_f$  cumple  $\mathcal{P}$ .  $\square$

**COROLARIO 1.3.16.** *En las hipótesis de la Proposición 1.3.15, si  $\mathcal{P}$  = (pseudo) encaje cerrado, (pseudo) finito se verifican (1) y (3) y, entonces se tienen (4), (5) y (7).*

**DEMOSTRACIÓN.** Trivialmente se tiene que todo (pseudo) encaje cerrado es (pseudo) finito y, por lo tanto  $\mathcal{P}$  verifica (1). Además, en 1.2.21.(1) se ha visto que los (pseudo) encajes cerrados son estables para la composición y, en 1.3.4.(2) se ha probado que los morfismos (pseudo) finitos son estables para la composición, de donde se sigue que verifican (3).  $\square$

**COROLARIO 1.3.17.** *En las hipótesis de la Proposición 1.3.15, si  $\mathcal{P}$  = separado, radical, (pseudo) tipo finito, pseudo cuasifinito, cuasirevestimiento se satisfacen (2) y (3) y, por lo tanto, se cumplen (4), (6) y (7).*

**DEMOSTRACIÓN.** Si  $f$  es un morfismo con la propiedad  $\mathcal{P}$  se comprueba fácilmente que satisface (2). Además los morfismos con la propiedad  $\mathcal{P}$  son estables por composición (cf. 1.2.23, 1.2.26.(1), 1.3.4.(1), 1.3.6 y 1.3.9).  $\square$

#### 1.4. Morfismos planos y morfismos de completación

En la primera parte de esta sección se estudian los morfismos planos en  $\mathbf{Sfn}$ . Cuando un morfismo  $f = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} f_n$  es ádico, el Criterio local de planitud para esquemas formales (Proposición 1.4.7) relaciona el carácter plano de  $f$  y de los morfismos  $f_n$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Sin embargo, en ausencia de la hipótesis ádica esta relación no se tiene (Ejemplo 1.4.5). En la segunda parte se estudian los morfismos de completación en  $\mathbf{Sfn}$ , una clase de



morfismos planos que son pseudo encajes cerrados (por lo tanto, son aplicaciones topológicas cerradas) y que jugarán un papel esencial en los teoremas principales del Capítulo 3 (Teorema 3.5.1, Teorema 3.5.2 y Teorema 3.5.3).

DEFINICIÓN 1.4.1. Un morfismo  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  es *plano en*  $x \in \mathfrak{X}$  si  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},x}$  es un  $\mathcal{O}_{\mathfrak{Y},f(x)}$ -módulo plano. Diremos que  $f$  es *plano* si es plano en  $x$ , para todo  $x \in \mathfrak{X}$ .

1.4.2. Dados  $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$  y  $\mathcal{K} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$  Ideales de definición con  $f^*(\mathcal{K})\mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \subset \mathcal{J}$ , si  $\widehat{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},x}}$  y  $\widehat{\mathcal{O}_{\mathfrak{Y},f(x)}}$  son los anillos separados y completos de  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},x}$  y  $\mathcal{O}_{\mathfrak{Y},f(x)}$  para las topologías  $\mathcal{J}\mathcal{O}_{\mathfrak{X},x}$  y  $\mathcal{K}\mathcal{O}_{\mathfrak{Y},f(x)}$ -ádicas, por [B1, III, §5.4, Proposition 4] se verifica que son equivalentes:

- (1)  $f$  es plano en  $x \in \mathfrak{X}$
- (2)  $\widehat{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},x}}$  es un  $\widehat{\mathcal{O}_{\mathfrak{Y},f(x)}}$ -módulo plano
- (3)  $\widehat{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},x}}$  es un  $\widehat{\mathcal{O}_{\mathfrak{Y},f(x)}}$ -módulo plano

LEMA 1.4.3. [AJL1, 7.1.1] *Un morfismo  $\mathrm{Spf}(A) \xrightarrow{f} \mathrm{Spf}(B)$  es plano si, y sólo si,  $A$  es un  $B$ -módulo plano.*

DEMOSTRACIÓN. Si  $f$  es plano para todo  $\mathfrak{m} \subset A$  ideal maximal, con  $\mathfrak{n} = f^{-1}(\mathfrak{m})$  se verifica que  $A_{\{\mathfrak{m}\}}$  es un  $B_{\{\mathfrak{n}\}}$ -módulo plano y por [B1, III, §5.4, Proposition 4] se tiene que  $A_{\mathfrak{m}}$  es un  $B_{\mathfrak{n}}$ -módulo plano. Por lo tanto,  $A$  es un  $B$ -módulo plano. Recíprocamente, si  $A$  es un  $B$ -módulo plano, entonces  $A_{\{\mathfrak{p}\}}$  es un  $B_{\{\mathfrak{q}\}}$ -módulo plano para todo  $\mathfrak{p} \subset A$  ideal primo y  $\mathfrak{q} = f^{-1}(\mathfrak{p})$  y, en particular para todo  $\mathfrak{p} \subset A$  ideal primo abierto.  $\square$

1.4.4. Como la planitud es una cuestión local, el lema anterior implica que:

- (1) Los encajes abiertos son morfismos planos.
- (2) La planitud es estable para la composición de morfismos, para cambio de base y para el producto de morfismos.
- (3) Si  $X$  es un esquema (usual) noetheriano y  $X' \subset X$  un subesquema cerrado el morfismo de compleción  $X_{/X'} \xrightarrow{\kappa} X'$  es plano.

Sin embargo, el siguiente ejemplo muestra que la propiedad “ser plano” en general no verifica el enunciado (7) de la Proposición 1.3.15.

EJEMPLO 1.4.5. Si  $K$  es un cuerpo y  $\mathbb{A}_K^1 = \mathrm{Spec}(K[T])$  consideremos el cerrado  $X' = V(\langle T \rangle) \subset \mathbb{A}_K^1$ . El morfismo canónico de compleción de  $\mathbb{A}_K^1$  a lo largo de  $X'$

$$\mathbb{D}_K^1 \xrightarrow{\kappa} \mathbb{A}_K^1$$

es plano y, sin embargo, los morfismos

$$\mathrm{Spec}(K[T]/\langle T \rangle^{n+1}) \xrightarrow{\kappa_n} \mathbb{A}_K^1$$

no son planos, cualquiera que sea  $n \in \mathbb{N}$ .

PROPOSICIÓN 1.4.6. *Sea  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} Y$  en  $\mathbf{Sfn}$  con  $Y$  un esquema usual,  $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$  un Ideal de definición y denotemos por  $X_n = (\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/\mathcal{J}^{n+1}) \xrightarrow{f_n} Y$  los morfismos inducidos por  $f$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Si  $f_n$  es un morfismo plano, para todo  $n \in \mathbb{N}$ , entonces  $f$  es un morfismo plano.*

DEMOSTRACIÓN. (cf. [Ma, Theorem 22.1]) Podemos suponer que  $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$ , que  $\mathcal{J} = J^\Delta$  con  $A$  un anillo  $J$ -ádico noetheriano y que  $Y = \mathrm{Spec}(B)$ . Veamos que  $A$  es una  $B$ -álgebra plana. Para ello sea  $K \subset B$  un ideal y probemos que la aplicación  $K' := K \otimes_B A \xrightarrow{u} A$  es inyectiva. Como  $K'$  es un  $A$ -módulo finitamente generado, es completo para la topología  $J$ -ádica y, por lo tanto  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} J^{n+1}K' = 0$ . Sea  $x \in \ker(u)$ . Por hipótesis, para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A/J^{n+1}$  es  $B$ -álgebra plana y, por lo tanto los morfismos

$$\frac{K'}{J^{n+1}K'} = K' \otimes_A \frac{A}{J^{n+1}} = K \otimes_B \frac{A}{J^{n+1}} \xrightarrow{u \otimes \frac{A}{J^{n+1}}} \frac{A}{J^{n+1}}$$

son inyectivos, para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Se deduce que  $x \in J^{n+1}K'$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ , con lo cual  $x = 0$ .  $\square$

El Ejemplo 1.4.5 muestra que no se verifica el recíproco de este resultado.

PROPOSICIÓN 1.4.7 (Criterio local de planitud para esquemas formales). *Sea  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  un morfismo ádico,  $\mathcal{K}$  un Ideal de definición de  $\mathfrak{Y}$ ,  $\mathcal{J} = f^*(\mathcal{K})\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$  y  $X_n \xrightarrow{f_n} Y_n$  los morfismos inducidos por  $f$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Las siguientes condiciones son equivalentes:*

- (1)  $f$  es plano.
- (2)  $f_n$  es plano, para todo  $n \in \mathbb{N}$ .
- (3)  $f_0$  es plano y  $\mathrm{Tor}_1^{\mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}, \mathcal{O}_{Y_0}) = 0$ .
- (4)  $f_0$  es plano y  $\mathcal{J} = f^*(\mathcal{K})$ .

Además,  $f$  es ádico y plano si y sólo si,  $f_0$  es plano y  $\mathcal{J} = f^*(\mathcal{K})$ .

DEMOSTRACIÓN. Podemos suponer que  $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A) \xrightarrow{f} \mathfrak{Y} = \mathrm{Spf}(B)$  está en  $\mathbf{Sfn}$ . Entonces si  $\mathcal{K} = K^\Delta$  se tiene que  $\mathcal{J} = (KA)^\Delta$  y la proposición es consecuencia del Lema 1.4.3 y del Criterio local de planitud para anillos (cf. [Ma, Theorem 22.3]).  $\square$

En el Ejemplo 1.1.7 hemos visto como a partir de un esquema (usual)  $X$  localmente noetheriano y un subesquema cerrado de  $X' \subset X$  se obtiene un esquema formal localmente noetheriano  $X_{/X'}$ , llamado compleción de  $X$  a lo largo de  $X'$  y, se tiene un morfismo canónico  $X_{/X'} \xrightarrow{k} X$ . A continuación se define la compleción de un esquema formal  $\mathfrak{X}$  en  $\mathbf{Sfn}$  a lo largo de un subesquema formal cerrado  $\mathfrak{X}' \subset \mathfrak{X}$ . A pesar de que la construcción es natural no aparece en las referencias básicas de esquemas formales, y dado que los morfismos de compleción serán utilizados más tarde, hemos optado por incluirlos aquí.

DEFINICIÓN 1.4.8. Sea  $\mathfrak{X}$  en  $\text{Sfn}$  y  $\mathfrak{X}' \subset \mathfrak{X}$  un subesquema formal cerrado dado por un Ideal  $\mathcal{I}$  de  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ . Dado  $\mathcal{J}$  un Ideal de definición de  $\mathfrak{X}$  se define la *compleción de  $\mathfrak{X}$  a lo largo de  $\mathfrak{X}'$* , y se denota por  $\mathfrak{X}/_{\mathfrak{X}'}$ , como el espacio topológicamente anillado con espacio topológico  $\mathfrak{X}'$  y cuyo haz de anillos topológicos viene dado por

$$\mathcal{O}_{\mathfrak{X}/_{\mathfrak{X}'}} = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \frac{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}}{(\mathcal{J} + \mathcal{I})^{n+1}}$$

La definición no depende del Ideal de definición  $\mathcal{J}$  escogido de  $\mathfrak{X}$ . En efecto, si  $\mathcal{J}' \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$  es otro Ideal de definición para todo  $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{X}$  abierto afín existen  $r, s \in \mathbb{N}$  tales que  $\mathcal{J}'|_{\mathfrak{U}}^r \subset \mathcal{J}|_{\mathfrak{U}}$  y  $\mathcal{J}'|_{\mathfrak{U}}^s \subset \mathcal{J}|_{\mathfrak{U}}$  y, por lo tanto

$$\begin{aligned} (\mathcal{J}|_{\mathfrak{U}} + \mathcal{I}|_{\mathfrak{U}})^r &\subset \mathcal{J}'|_{\mathfrak{U}}^r + \mathcal{I}|_{\mathfrak{U}} \subset \mathcal{J}'|_{\mathfrak{U}} + \mathcal{I}|_{\mathfrak{U}} \\ (\mathcal{J}'|_{\mathfrak{U}} + \mathcal{I}|_{\mathfrak{U}})^s &\subset \mathcal{J}'|_{\mathfrak{U}}^s + \mathcal{I}|_{\mathfrak{U}} \subset \mathcal{J}|_{\mathfrak{U}} + \mathcal{I}|_{\mathfrak{U}}, \end{aligned}$$

con lo que  $\varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/(\mathcal{J} + \mathcal{I})^{n+1} = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/(\mathcal{J}' + \mathcal{I})^{n+1}$ .

Es un ejercicio sencillo comprobar que  $\mathfrak{X}/_{\mathfrak{X}'}$  satisface las hipótesis de [EGA I, (10.6.3) y (10.6.4)] de donde se deduce que:

- (1)  $\mathfrak{X}/_{\mathfrak{X}'}$  es un esquema formal localmente noetheriano
- (2)  $(\mathcal{I} + \mathcal{J})/_{\mathfrak{X}'} := \varprojlim_{n \in \text{Sfn}} (\mathcal{J} + \mathcal{I})/(\mathcal{J} + \mathcal{I})^{n+1}$  es un Ideal de definición

de  $\mathfrak{X}/_{\mathfrak{X}'}$

- (3)  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}/_{\mathfrak{X}'}}/((\mathcal{I} + \mathcal{J})/_{\mathfrak{X}'})^{n+1} = \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/(\mathcal{J} + \mathcal{I})^{n+1}$

1.4.9. Con las notaciones anteriores, si  $Z_n = (\mathfrak{X}', \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/(\mathcal{J} + \mathcal{I})^{n+1})$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ , por 1.1.16 se tiene que

$$\mathfrak{X}/_{\mathfrak{X}'} = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} Z_n$$

Por otra parte, si  $X_n = (\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/\mathcal{J}^{n+1})$  y  $X'_n = (\mathfrak{X}', \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/\mathcal{J}^{n+1} + \mathcal{I})$ , los morfismos canónicos

$$\frac{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}}{\mathcal{J}^{n+1}} \twoheadrightarrow \frac{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}}{(\mathcal{J} + \mathcal{I})^{n+1}} \twoheadrightarrow \frac{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}}{\mathcal{J}^{n+1} + \mathcal{I}}$$

proporcionan los encajes cerrados de esquemas  $X'_n \xrightarrow{j_n} Z_n \xrightarrow{\kappa_n} X_n$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$  de modo que los siguientes diagramas son conmutativos:

$$\begin{array}{ccccc} X'_m & \xrightarrow{j_m} & Z_m & \xrightarrow{\kappa_m} & X_m \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ X'_n & \xrightarrow{j_n} & Z_n & \xrightarrow{\kappa_n} & X_n \end{array}$$

para todo  $m \geq n \geq 0$ . Entonces por 1.1.17 se tienen los morfismos canónicos en  $\text{Sfn}$

$$\mathfrak{X}' \xrightarrow{j} \mathfrak{X}/_{\mathfrak{X}'} \xrightarrow{\kappa} \mathfrak{X}$$

donde  $j$  es un encaje cerrado (véase la Proposición 1.2.17). El morfismo  $\kappa$  como aplicación topológica es la inclusión y se llama *morfismo de completión de  $\mathfrak{X}$  a lo largo de  $\mathfrak{X}'$* .

OBSERVACIÓN. Observemos que  $\kappa$  es ádico únicamente si  $\mathcal{I}$  está contenido en un Ideal de definición de  $\mathfrak{X}$ , en cuyo caso  $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}/\mathfrak{X}'$  y  $\kappa = 1_{\mathfrak{X}}$ .

1.4.10. Si  $\mathfrak{X} = \text{Spf}(A)$  está en  $\text{Sfn}_{\text{af}}$  con  $A$  un anillo  $J$ -ádico noetheriano, y  $\mathfrak{X}' = \text{Spf}(A/I)$  es un subesquema formal cerrado de  $\mathfrak{X}$ , entonces

$$\Gamma(\mathfrak{X}/\mathfrak{X}', \mathcal{O}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{X}'}) = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \frac{A}{(J+I)^{n+1}} =: \widehat{A}$$

y por la equivalencia de categorías (1.1.10.1) se tiene que  $\mathfrak{X}/\mathfrak{X}' = \text{Spf}(\widehat{A})$  y que los morfismos  $\mathfrak{X}' \xrightarrow{j} \mathfrak{X}/\mathfrak{X}' \xrightarrow{\kappa} \mathfrak{X}$  se corresponden con los morfismos continuos naturales  $A \rightarrow \widehat{A} \rightarrow A/I$ .

PROPOSICIÓN 1.4.11. *Dado  $\mathfrak{X}$  en  $\text{Sfn}$  y  $\mathfrak{X}'$  un subesquema formal cerrado de  $\mathfrak{X}$  se verifica que el morfismo de completión  $\mathfrak{X}/\mathfrak{X}' \xrightarrow{\kappa} \mathfrak{X}$  es un pseudo encaje cerrado plano.*

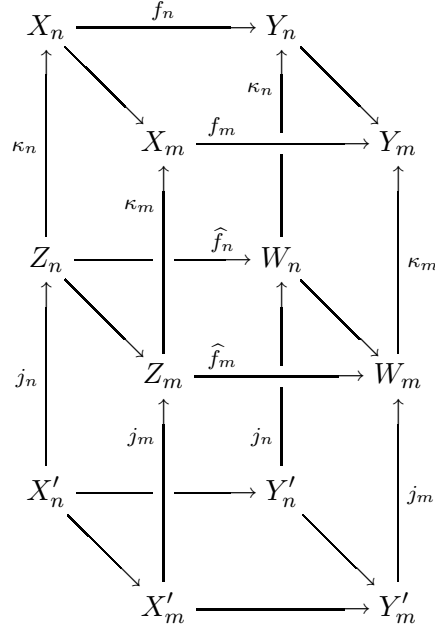
DEMOSTRACIÓN. Con las notaciones de 1.4.9 se tiene que  $\kappa = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} \kappa_n$

y, como  $\kappa_n$  es un encaje cerrado para todo  $n \in \mathbb{N}$ , se sigue que  $\kappa$  es un pseudo encaje cerrado. Para probar que  $\kappa$  es un morfismo plano podemos suponer que  $\mathfrak{X} = \text{Spf}(A)$  y  $\mathfrak{X}' = \text{Spf}(A/I)$ , donde  $A$  es un anillo  $J$ -ádico noetheriano. Entonces  $\mathfrak{X}/\mathfrak{X}' = \text{Spf}(\widehat{A})$  donde  $\widehat{A}$  es el anillo completo de  $A$  para la topología  $(J+I)$ -ádica y, por lo tanto, es plano sobre  $A$ . Aplicando el Lema 1.4.3 resulta que  $\kappa$  es un morfismo plano.  $\square$

OBSERVACIÓN. Recíprocamente, en el Teorema 3.4.4 se verá que todo pseudo encaje cerrado plano es un morfismo de completión.

1.4.12. Dado  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  en  $\text{Sfn}$ , sean  $\mathfrak{X}' \subset \mathfrak{X}$  e  $\mathfrak{Y}' \subset \mathfrak{Y}$  subesquemas formales cerrados dados por los Ideales  $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$  y  $\mathcal{L} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$  tales que  $f^*(\mathcal{L})\mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \subset \mathcal{I}$ , es decir,  $f(\mathfrak{X}') \subset \mathfrak{Y}'$  y denotemos  $X'_n = (\mathfrak{X}', \mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}/\mathcal{I}^{n+1})$  e  $Y'_n = (\mathfrak{Y}', \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}'}/\mathcal{L}^{n+1})$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Si  $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$  y  $\mathcal{K} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$  son Ideales de definición tales que  $f^*(\mathcal{K})\mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \subset \mathcal{J}$ , llamemos  $X_n = (\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/\mathcal{J}^{n+1})$ ,  $Y_n = (\mathfrak{Y}, \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}/\mathcal{K}^{n+1})$ ,  $Z_n = (\mathfrak{X}', \mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}/(\mathcal{J} + \mathcal{I})^{n+1})$  y  $W_n = (\mathfrak{Y}', \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}'}/(\mathcal{K} + \mathcal{L})^{n+1})$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Entonces el morfismo  $f$  induce los siguientes diagramas

conmutativos de esquemas localmente noetherianos:



para todo  $m \geq n \geq 0$ . Por paso al  $\lim_{n \in \mathbb{N}}$  se tiene un morfismo  $\mathfrak{X}/\mathfrak{X}' \xrightarrow{\widehat{f}} \mathfrak{Y}/\mathfrak{Y}'$  en  $\text{Sfn}$ , que llamaremos *compleción de  $f$  a lo largo de  $\mathfrak{X}'$  e  $\mathfrak{Y}'$* , de modo que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathfrak{X} & \xrightarrow{f} & \mathfrak{Y} \\
 \uparrow \kappa & & \uparrow \kappa \\
 \mathfrak{X}/\mathfrak{X}' & \xrightarrow{\widehat{f}} & \mathfrak{Y}/\mathfrak{Y}' \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 \mathfrak{X}' & \xrightarrow{f|_{\mathfrak{X}'}} & \mathfrak{Y}'
 \end{array} \tag{1.4.12.5}$$

1.4.13. Supongamos que  $\mathfrak{X} = \text{Spf}(A) \xrightarrow{f} \mathfrak{Y} = \text{Spf}(B)$  está en  $\text{Sfn}_{\text{af}}$  y que  $\mathfrak{X}' = \text{Spf}(A/I)$  e  $\mathfrak{Y}' = \text{Spf}(B/L)$  con  $LA \subset I$ . Si  $J \subset A$  y  $K \subset B$  son ideales de definición tales que  $KA \subset J$ , el morfismo  $\mathfrak{X}/\mathfrak{X}' \xrightarrow{\widehat{f}} \mathfrak{Y}/\mathfrak{Y}'$  se corresponde vía la equivalencia de categorías (1.1.10.1) con el morfismo inducido por  $B \rightarrow A$

$$\widehat{B} \rightarrow \widehat{A}$$

donde  $\widehat{A}$  es el anillo completo de  $A$  para la topología  $(I + J)$ -ádica y  $\widehat{B}$  denota el anillo completo de  $B$  para la topología  $(K + L)$ -ádica.

PROPOSICIÓN 1.4.14. *Dado  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  en  $\text{Sfn}$ , sea  $\mathfrak{Y}' \subset \mathfrak{Y}$  subesquema formal cerrado y  $\mathfrak{X}' = f^{-1}(\mathfrak{Y}')$ . Entonces,*

$$\mathfrak{X}_{/\mathfrak{X}'} = \mathfrak{Y}_{/\mathfrak{Y}'} \times_{\mathfrak{Y}} \mathfrak{X}$$

DEMOSTRACIÓN. Podemos suponer que  $\mathfrak{X} = \text{Spf}(A)$ ,  $\mathfrak{Y} = \text{Spf}(B)$  e  $\mathfrak{Y}' = \text{Spf}(B/L)$  son esquemas formales afines y que  $J \subset A$  y  $K \subset B$  son ideales de definición tales que  $KA \subset J$ . Por hipótesis,  $\mathfrak{X}' = \text{Spf}(A/LA)$  y entonces  $\mathfrak{X}_{/\mathfrak{X}'} = \text{Spf}(\widehat{A})$  donde  $\widehat{A}$  es el anillo completo de  $A$  para la topología  $(J + LA)$ -ádica. Por otra parte,  $\mathfrak{Y}_{/\mathfrak{Y}'} = \text{Spf}(\widehat{B})$  donde  $\widehat{B}$  denota el anillo completo de  $B$  para la topología  $(K + L)$ -ádica y entonces se verifica que

$$\widehat{B} \widehat{\otimes}_B A = B \widehat{\otimes}_B A = \widehat{A}$$

ya que  $J + (K + L)A = J + KA + JA = J$  y, por lo tanto, se tiene el resultado.  $\square$

PROPOSICIÓN 1.4.15. *Dado  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  en  $\text{Sfn}$ , consideremos  $\mathfrak{X}' \subset \mathfrak{X}$  e  $\mathfrak{Y}' \subset \mathfrak{Y}$  subesquemas formales cerrados tal que  $f(\mathfrak{X}') \subset \mathfrak{Y}'$ .*

(1) *Sea  $\mathcal{P}$  una de las siguientes propiedades de morfismos en  $\text{Sfn}$ :*

pseudo tipo finito, pseudo finito, pseudo encaje cerrado, pseudo cuasifinito, cuasirevestimiento, plano, separado, radical.

*Si  $f$  verifica  $\mathcal{P}$ , entonces  $\widehat{f}$  también.*

(2) *Además, si  $\mathfrak{X}' = f^{-1}(\mathfrak{Y}')$ , consideremos  $\mathcal{Q}$  una de las siguientes propiedades de morfismos en  $\text{Sfn}$ :*

ádico, tipo finito, finito, encaje cerrado.

*Entonces, si  $f$  verifica  $\mathcal{Q}$ ,  $\widehat{f}$  también.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que  $f$  es plano y veamos que  $\widehat{f}$  es plano. Para ello, podemos tomar  $\mathfrak{X} = \text{Spf}(A) \xrightarrow{f} \mathfrak{Y} = \text{Spf}(B)$  en  $\text{Sfn}_{\text{af}}$ ,  $\mathfrak{X}' = \text{Spf}(A/I)$  e  $\mathfrak{Y}' = \text{Spf}(B/L)$  con  $LA \subset I$ . Sean  $J \subset A$  y  $K \subset B$  ideales de definición tales que  $KA \subset J$  y,  $\widehat{A}$  y  $\widehat{B}$  los anillos separados y completos de  $A$  y  $B$  para las topologías dadas por  $(I + J) \subset A$  y  $(K + L) \subset B$ . Por [B1, III, §5.4, Proposition 4] se tiene que el morfismo  $\widehat{B} \rightarrow \widehat{A}$  es plano y, aplicando 1.4.13 y el Lema 1.4.3 resulta que  $\widehat{f}$  es plano.

Supongamos que  $f$  verifica una cualquiera de las otras propiedades  $\mathcal{P}$  y probemos que  $\widehat{f}$  hereda dicha propiedad. De 1.2.23, 1.2.26 y de la Proposición 1.4.11 se deduce que el morfismo de completación  $\mathfrak{X}_{/\mathfrak{X}'} \xrightarrow{\kappa} \mathfrak{X}$  verifica  $\mathcal{P}$  y, por el Corolario 1.3.16 y el Corolario 1.3.17 se tiene que  $f \circ \kappa$  verifica  $\mathcal{P}$ . Entonces por la conmutatividad del diagrama (1.4.12.5) se tiene que  $\mathfrak{X}_{/\mathfrak{X}'} \xrightarrow{\widehat{f}} \mathfrak{Y}_{/\mathfrak{Y}'} \xrightarrow{\kappa} Y$  verifica  $\mathcal{P}$ . Aplicando de nuevo el Corolario 1.3.16 y el Corolario 1.3.17 resulta que  $\widehat{f}$  cumple  $\mathcal{P}$ .

Por otro lado, si  $f$  es ádico de la Proposición 1.4.14 y de 1.2.6.(3) se deduce que  $\widehat{f}$  es ádico. Entonces, si  $\mathcal{Q}$  es cualquiera de las otras propiedades y  $f$  tiene  $\mathcal{Q}$ , por (1) se tiene que  $\widehat{f}$  verifica  $\mathcal{Q}$ .  $\square$

COROLARIO 1.4.16. *Dado  $\mathfrak{X}$  en  $\text{Sfn}$  y  $\mathfrak{X}' \subset \mathfrak{X}$  un subesquema formal cerrado, se verifica que el morfismo de completión  $\mathfrak{X}/\mathfrak{X}' \xrightarrow{k} \mathfrak{X}$  es de pseudo tipo finito, pseudo finito, pseudo encaje cerrado, pseudo cuasifinito, cuasirevestimiento, plano, separado y radical.*





## CAPÍTULO 2

### Condiciones infinitesimales de morfismos de esquemas formales

En este capítulo se definen las condiciones infinitesimales en  $\text{Sfn}$  y se estudian sus propiedades utilizando como herramienta básica el módulo de diferenciales.

#### 2.1. El Módulo de diferenciales

Dado  $X \xrightarrow{f} Y$  un morfismo de esquemas de tipo finito, es conocido que el Módulo de 1-diferenciales de  $X$  sobre  $Y$ ,  $\Omega_{X/Y}^1$ , es una herramienta imprescindible para el estudio del carácter liso, no ramificado o étale de  $f$ . En esta sección, se introduce el Módulo de 1-diferenciales para un morfismo  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  en  $\text{Sfn}$  y se estudian sus propiedades fundamentales, que serán utilizadas en las caracterizaciones de las condiciones infinitesimales en la Sección 2.3. Su descripción es más delicada que en el caso de espacios anillados. El módulo de diferenciales de un morfismo  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  en  $\text{Sfn}$  en el sentido de espacios anillados no es completo, su completación posee buenas propiedades, análogas a las del módulo de diferenciales en el caso de esquemas. En la primera parte de la sección, recordaremos algunas propiedades básicas del módulo de diferenciales completo  $\widehat{\Omega}_{A/B}^1$  para un morfismo  $A \rightarrow B$  de anillos ádicos. A continuación, se estudian propiedades del Módulo de 1-diferenciales,  $\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^1$ , para un morfismo  $\mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$  en  $\text{Sfn}$ .

DEFINICIÓN 2.1.1. (*cf.* [EGA IV<sub>4</sub>, §0.20.4, p. 219]) Dado  $B \rightarrow A$  un homomorfismo continuo de anillos preádicos y  $K \subset B$ ,  $J \subset A$  ideales de definición tales que  $KA \subset J$ , denotamos por  $I$  el núcleo del epimorfismo continuo

$$\begin{aligned} A \otimes_B A &\rightarrow A \\ a_1 \otimes a_2 &\rightsquigarrow a_1 \cdot a_2 \end{aligned}$$

donde en  $A \otimes_B A$  se considera la topología producto tensor (*cf.* [B1, III, Exercise §2.28]). Se define el *módulo de 1-diferenciales de  $A$  sobre  $B$*  como el  $A$ -módulo topológico

$$\Omega_{A/B}^1 = \frac{I}{I^2}$$

con la topología  $J$ -ádica<sup>1</sup>. Denotamos por  $\widehat{\Omega}_{A/B}^1$ , el módulo completo de  $\Omega_{A/B}^1$  respecto a la topología  $J$ -ádica, es decir,

$$\widehat{\Omega}_{A/B}^1 = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \frac{\Omega_{A/B}^1}{J^{n+1}\Omega_{A/B}^1}$$

En particular, si  $B \rightarrow A$  es un homomorfismo de anillos (discretos) se tiene que  $\Omega_{A/B}^1 = \widehat{\Omega}_{A/B}^1$ .

**DEFINICIÓN 2.1.2.** [EGA IV<sub>4</sub>, (0.20.3.1)] Sea  $B \rightarrow A$  un homomorfismo continuo de anillos preádicos y  $L$  un  $A$ -módulo topológico. Una  $B$ -derivación continua de  $A$  en  $L$  es una aplicación  $A \xrightarrow{d} L$  verificando las siguientes condiciones:

- (1)  $d \in \text{Homcont}_B(A, L)$
- (2) Para todo  $a_1, a_2 \in A$ , se tiene que  $d(a_1 \cdot a_2) = a_1 \cdot d(a_2) + a_2 \cdot d(a_1)$ .

Denotaremos por  $\text{Dercont}_B(A, L)$  el conjunto de las  $B$ -derivaciones continuas de  $A$  en  $L$ . Obviamente  $\text{Dercont}_B(A, L)$  es un subgrupo del grupo  $\text{Der}_B(A, L)$  de las  $B$ -derivaciones de  $A$  en  $L$ .

2.1.3. Dado  $B \rightarrow A$  un homomorfismo continuo de anillos preádicos, sean  $A \xrightarrow{j_1} A \otimes_B A$ ,  $A \xrightarrow{j_2} A \otimes_B A$  los  $B$ -homomorfismos continuos canónicos dados por  $j_1(a) = a \otimes 1$ ,  $j_2(a) = 1 \otimes a$ . Si denotamos por  $p_1$  y  $p_2$  los  $B$ -homomorfismos continuos canónicos

$$A \xrightarrow{j_1} A \otimes_B A \xrightarrow{p} (A \otimes_B A)/I^2 \quad \text{y} \quad A \xrightarrow{j_2} A \otimes_B A \xrightarrow{p} (A \otimes_B A)/I^2,$$

respectivamente, donde  $p$  es la proyección canónica, resulta que

$$d_{A/B} := p_1 - p_2 : A \rightarrow \Omega_{A/B}^1$$

es una  $B$ -derivación continua; y se denomina *derivación canónica de  $A$  sobre  $B$* . La  $B$ -derivación continua  $d_{A/B}$  se extiende de modo natural a una  $\widehat{B}$ -derivación continua (y que, con un abuso de terminología llamaremos derivación canónica completa de  $\widehat{A}$  sobre  $\widehat{B}$ )

$$\widehat{A} \xrightarrow{\widehat{d}_{A/B}} \widehat{\Omega}_{A/B}^1$$

de modo que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \widehat{A} \\ d_{A/B} \downarrow & & \downarrow \widehat{d}_{A/B} \\ \Omega_{A/B}^1 & \longrightarrow & \widehat{\Omega}_{A/B}^1 \end{array}$$

En particular, si  $B \rightarrow A$  es un homomorfismo de anillos (discretos) resulta que  $d_{A/B} = \widehat{d}_{A/B}$ .

<sup>1</sup>Nótese que la topología  $J$ -ádica en  $\Omega_{A/B}^1$  coincide con la topología cociente de la topología inducida por  $A \otimes_B A$  en  $I$  (cf. [EGA IV<sub>4</sub>, (0.20.4.5)])

OBSERVACIÓN. Dado  $B \rightarrow A$  un morfismo de anillos ádicos noetherianos, en general  $\Omega_{A/B}^1$  no es un  $A$ -módulo completo.

EJEMPLO 2.1.4. [E, Exercise 16.14.a] Sea  $\mathbb{Q}$  el cuerpo de los números racionales y  $R = \mathbb{Q}[[T_1, T_2, \dots, T_r]]$ . Entonces  $\Omega_{R/\mathbb{Q}}^1$  no es un  $R$ -módulo finitamente generado.

NOTACIÓN. Dado  $A$  un anillo  $J$ -preádico, denotaremos por  $A\text{-comp}$  la categoría de los  $A$ -módulos completos para la topología  $J$ -ádica. Así, si  $B \rightarrow A$  es un homomorfismo continuo de anillos preádicos se tiene que  $\widehat{\Omega}_{A/B}^1 \in A\text{-comp}$ .

2.1.5. Sea  $B \rightarrow A$  un morfismo de anillos preádicos. Si  $J \subset A$  es un ideal de definición denotemos por  $\widehat{A}$  el anillo completo de  $A$  para la topología  $J$ -ádica. Para todo  $M \in A\text{-comp}$  el isomorfismo  $\text{Homcont}_A(\Omega_{A/B}^1, M) \cong \text{Dercont}_B(A, M)$  (cf. [EGA IV<sub>4</sub>, (0.20.4.8.2)]) induce el siguiente isomorfismo canónico de  $B$ -módulos

$$\begin{array}{ccc} \text{Homcont}_A(\widehat{\Omega}_{A/B}^1, M) & \cong & \text{Dercont}_B(\widehat{A}, M) \\ u & \rightsquigarrow & u \circ \widehat{d}_{A/B} \end{array} \quad (2.1.5.1)$$

Es decir,  $(\widehat{\Omega}_{A/B}^1, \widehat{d}_{A/B})$  es el representante del funtor

$$M \in A\text{-comp} \rightsquigarrow \text{Dercont}_B(\widehat{A}, M)$$

En particular, si  $M$  es un  $A/J$ -módulo se tiene el isomorfismo

$$\text{Hom}_A(\widehat{\Omega}_{A/B}^1, M) \cong \text{Der}_B(\widehat{A}, M) \quad (2.1.5.2)$$

2.1.6. Dado  $B \rightarrow A$  un morfismo continuo de anillos preádicos, sean  $K \subset B$  y  $J \subset A$  ideales de definición tales que  $KA \subset J$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , si ponemos  $A_n = A/J^{n+1}$  y  $B_n = B/K^{n+1}$ , se tiene un isomorfismo canónico

$$(\widehat{\Omega}_{A/B}^1, \widehat{d}_{A/B}) \cong \left( \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \Omega_{A_n/B_n}^1, \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} d_{A_n/B_n} \right)$$

En efecto, para cada  $n \in \mathbb{N}$  se tiene que  $A_n \xrightarrow{\widehat{d}_{A/B} \otimes_A A_n} \widehat{\Omega}_{A/B}^1 \otimes_A A_n$  es una  $B_n$ -derivación continua y, entonces por (2.1.5.1) existe un morfismo de  $A_n$ -módulos  $\Omega_{A_n/B_n}^1 \xrightarrow{u_n} \widehat{\Omega}_{A/B}^1 \otimes_A A_n$  tal que los siguientes diagramas son

conmutativos:

$$\begin{array}{ccc}
 A_m & \xrightarrow{\widehat{d}_{A/B} \otimes_A A_m} & \widehat{\Omega}_{A/B}^1 \otimes_A A_m \\
 \downarrow & \searrow^{d_{A_m/B_m}} \quad \nearrow^{u_m} & \downarrow \\
 & & \Omega_{A_n/B_m}^1 \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 A_n & \xrightarrow{\widehat{d}_{A/B} \otimes_A A_n} & \widehat{\Omega}_{A/B}^1 \otimes_A A_n \\
 \downarrow & \searrow^{d_{A_n/B_n}} \quad \nearrow^{u_n} & \downarrow \\
 & & \Omega_{A_n/B_n}^1
 \end{array}$$

para cada  $m \geq n \geq 0$ . Por paso al límite inverso se concluye que existe un morfismo de  $A$ -módulos  $\varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \Omega_{A_n/B_n}^1 \xrightarrow{u} \widehat{\Omega}_{A/B}^1$  tal que  $u \circ \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} d_{A_n/B_n} = \widehat{d}_{A/B}$ . Ahora bien, como  $\varprojlim_{n \in \mathbb{N}} d_{A_n/B_n} \in \text{Dercont}_B(A, \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \Omega_{A_n/B_n}^1)$ , por la unicidad salvo isomorfismo canónico del par  $(\widehat{\Omega}_{A/B}^1, \widehat{d}_{A/B})$  se deduce el resultado.

OBSERVACIÓN. Dado  $B \rightarrow A$  un morfismo de anillos preádicos, sean  $K \subset B$ ,  $J \subset A$  ideales de definición tales que  $KA \subset J$ . Como consecuencia de 2.1.6 resulta que

$$(\widehat{\Omega}_{A/B}^1, \widehat{d}_{A/B}) \cong (\widehat{\Omega}_{\widehat{A}/\widehat{B}}^1, \widehat{d}_{\widehat{A}/\widehat{B}}) \quad (2.1.6.3)$$

donde  $\widehat{A}$ ,  $\widehat{B}$  denotan los anillos completos de  $A$  y  $B$  respecto a las topologías  $J$  y  $K$ -preádicas, respectivamente.

2.1.7. Dado  $A$  un anillo (discreto) y  $\mathbf{T} = T_1, T_2, \dots, T_r$  un número finito de variables, es conocido que la derivación canónica de  $A[\mathbf{T}]$  sobre  $A$ ,  $d := d_{A[\mathbf{T}]/A}$ , viene dada por

$$\begin{array}{ccc}
 A[\mathbf{T}] & \xrightarrow{d} & \Omega_{A[\mathbf{T}]/A}^1 \\
 P = P(\mathbf{T}) & \rightsquigarrow & \sum_{i=1}^r \frac{\partial P}{\partial T_i} dT_i
 \end{array}$$

y que  $\Omega_{A[\mathbf{T}]/A}^1$  es un  $A[\mathbf{T}]$ -módulo libre de rango  $r$  con base

$$\{dT_1, dT_2, \dots, dT_r\}$$

En el ejemplo siguiente se generaliza este hecho para los anillos de series formales y los anillos de series formales restringidas sobre un anillo ádico noetheriano  $A$ .

EJEMPLO 2.1.8. Sea  $A$  un anillo ádico noetheriano y consideremos la inclusión  $A \hookrightarrow A\{\mathbf{T}\}[[\mathbf{Z}]] = A\{T_1, T_2, \dots, T_r\}[[Z_1, Z_2, \dots, Z_s]]$ . La derivación canónica  $A[\mathbf{T}, \mathbf{Z}] \xrightarrow{d} \Omega_{A[\mathbf{T}, \mathbf{Z}]/A}^1$  induce la derivación canónica completa  $\widehat{d} := \widehat{d}_{A\{\mathbf{T}\}[[\mathbf{Z}]]/A}$  de  $A\{\mathbf{T}\}[[\mathbf{Z}]]$  sobre  $A$

$$\begin{aligned} A\{\mathbf{T}\}[[\mathbf{Z}]] & \xrightarrow{\widehat{d}} \widehat{\Omega}_{A\{\mathbf{T}\}[[\mathbf{Z}]]/A}^1 \\ P = P(\mathbf{T}, \mathbf{Z}) & \rightsquigarrow \sum_{i=1}^r \frac{\partial P}{\partial T_i} \widehat{d}T_i + \sum_{j=1}^s \frac{\partial P}{\partial Z_j} \widehat{d}Z_j \end{aligned}$$

Se verifica que  $\widehat{\Omega}_{A\{\mathbf{T}\}[[\mathbf{Z}]]/A}^1$  es un  $A\{\mathbf{T}\}[[\mathbf{Z}]]$ -módulo libre de rango  $r + s$ , ya que

$$\widehat{\Omega}_{A\{\mathbf{T}\}[[\mathbf{Z}]]/A}^1 \underset{(2.1.6.3)}{\cong} \widehat{\Omega}_{A[\mathbf{T}, \mathbf{Z}]/A}^1 \underset{2.1.7}{\cong} \bigoplus_{i=1}^r A\{\mathbf{T}\}[[\mathbf{Z}]] \widehat{d}T_i \oplus \bigoplus_{j=1}^s A\{\mathbf{T}\}[[\mathbf{Z}]] \widehat{d}Z_j$$

Además, se deduce que  $\{\widehat{d}T_1, \widehat{d}T_2, \dots, \widehat{d}T_r, \widehat{d}Z_1, \dots, \widehat{d}Z_s\}$  es una base de  $\widehat{\Omega}_{A\{\mathbf{T}\}[[\mathbf{Z}]]/A}^1$ .

PROPOSICIÓN 2.1.9. Sea  $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A) \xrightarrow{f} \mathfrak{Y} = \mathrm{Spf}(B)$  un morfismo de pseudo tipo finito en  $\mathrm{Sfn}$ . Entonces  $\widehat{\Omega}_{A/B}^1$  es un  $A$ -módulo de tipo finito.

DEMOSTRACIÓN. Sean  $J \subset A$  y  $K \subset B$  ideales de definición tales que  $KA \subset J$ . Por hipótesis se tiene que  $B_0 = B/K \rightarrow A_0 = A/J$  es un morfismo de tipo finito y, por lo tanto,  $\Omega_{A_0/B_0}^1$  es un  $A_0$ -módulo de tipo finito. De la Segunda sucesión exacta fundamental (cf. [EGA IV<sub>4</sub>, (0.20.5.12.1)]) asociada a los morfismos de anillos discretos  $B \rightarrow A \rightarrow A_0$

$$\frac{J}{J^2} \rightarrow \Omega_{A/B}^1 \otimes_A A_0 \rightarrow \Omega_{A_0/B_0}^1 \rightarrow 0$$

se deduce que  $\Omega_{A/B}^1 \otimes_A A_0 = \Omega_{A/B}^1 / J\Omega_{A/B}^1$  es un  $A_0$ -módulo de tipo finito y por [EGA I, (0.7.2.7)] resulta que  $\widehat{\Omega}_{A/B}^1$  es un  $A$ -módulo de tipo finito.  $\square$

El Ejemplo 2.1.4 muestra que aunque  $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A) \xrightarrow{f} \mathfrak{Y} = \mathrm{Spf}(B)$  es un morfismo de pseudo tipo finito en  $\mathrm{Sfn}$ ,  $\Omega_{A/B}^1$  no es un  $A$ -módulo finitamente generado, en general.

LEMA 2.1.10. Sea  $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A) \xrightarrow{f} \mathfrak{Y} = \mathrm{Spf}(B)$  un morfismo en  $\mathrm{Sfn}_{\mathrm{af}}$  de pseudo tipo finito. Entonces:

- (1) Si  $B'$  es un anillo ádico tal que  $B'$  es una  $B$ -álgebra topológica y  $A' = B' \widehat{\otimes}_B A$  se verifica que

$$\widehat{\Omega}_{A'/B'}^1 \cong \widehat{\Omega}_{A/B}^1 \otimes_A A'$$

(2) Si  $S \subset A$  es un subconjunto multiplicativo se tiene que

$$\widehat{\Omega}_{A/B}^1\{S^{-1}\} \cong \widehat{\Omega}_{A\{S^{-1}\}/B}^1 \cong \widehat{\Omega}_{A/B}^1 \otimes_A A\{S^{-1}\}$$

(3) Para cada ideal primo abierto  $\mathfrak{p}$  de  $A$  resulta que

$$\widehat{\Omega}_{A\{\mathfrak{p}\}/B}^1 \cong (\widehat{\Omega}_{A/B}^1)_{\{\mathfrak{p}\}} \cong \widehat{\Omega}_{\widehat{A}_{\mathfrak{p}}/B}^1$$

DEMOSTRACIÓN. Para probar (1) basta observar que la topología inducida en  $\Omega_{A/B}^1 \otimes_A A'$  es la dada por la topología de  $A'$  y entonces como consecuencia del isomorfismo canónico de  $A'$ -módulos  $\Omega_{A'/B'}^1 \cong \Omega_{A/B}^1 \otimes_A A'$  (cf. [EGA IV<sub>4</sub>, (0.20.5.5)]) se verifica que

$$\widehat{\Omega}_{A'/B'}^1 \cong \Omega_{A/B}^1 \widehat{\otimes}_A A' \underset{[\text{EGA I, (0.7.7.1)}]}{\cong} \widehat{\Omega}_{A/B}^1 \widehat{\otimes}_A A'$$

Ahora bien, por la Proposición 2.1.9 se tiene que  $\widehat{\Omega}_{A/B}^1$  es un  $A$ -módulo de tipo finito y, por lo tanto,  $\widehat{\Omega}_{A'/B'}^1 \cong \widehat{\Omega}_{A/B}^1 \otimes_A A'$ .

La propiedad (2) se deduce de los isomorfismos topológicos canónicos

$$\widehat{\Omega}_{A/B}^1\{S^{-1}\} \cong \Omega_{A/B}^1\{S^{-1}\} \underset{[\text{EGA IV}_4, (0.20.5.9)]}{\cong} \widehat{\Omega}_{S^{-1}A/B}^1 \underset{(2.1.6.3)}{\cong} \widehat{\Omega}_{A\{S^{-1}\}/B}^1$$

La propiedad (3) es consecuencia de la propiedad (2). En efecto, para cada ideal primo abierto  $\mathfrak{p}$  de  $A$  se verifica que:

$$\begin{aligned} (\widehat{\Omega}_{A/B}^1)_{\{\mathfrak{p}\}} &\cong \left( \varinjlim_{f \notin \mathfrak{p}} (\widehat{\Omega}_{A/B}^1)_{\{f\}} \right) \underset{2.1.9}{\cong} \left( \varinjlim_{f \notin \mathfrak{p}} \widehat{\Omega}_{A/B}^1 \otimes_A A_{\{f\}} \right) \widehat{\phantom{A}} \\ &\cong \widehat{\Omega}_{A/B}^1 \widehat{\otimes}_A A_{\{\mathfrak{p}\}} \cong \Omega_{A/B}^1 \widehat{\otimes}_A A_{\mathfrak{p}} \underset{[\text{EGA IV}_4, (0.20.5.9)]}{\cong} \widehat{\Omega}_{\widehat{A}_{\mathfrak{p}}/B}^1 \\ &\cong \widehat{\Omega}_{A\{\mathfrak{p}\}/B}^1 \cong \widehat{\Omega}_{\widehat{A}_{\mathfrak{p}}/B}^1 \end{aligned}$$

Las dos últimas identificaciones son consecuencia del isomorfismo (2.1.6.3) teniendo en cuenta que  $\widehat{A}_{\{\mathfrak{p}\}} = \widehat{A}_{\mathfrak{p}}$ .  $\square$

2.1.11. Sea  $\mathfrak{X} = \text{Spf}(A) \xrightarrow{f} \mathfrak{Y} = \text{Spf}(B)$  un morfismo en  $\text{Sfn}_{\text{af}}$  de pseudo tipo finito. Como consecuencia de los dos últimos resultados se tiene que:

- (1) Para todo  $S \subset A$  subconjunto multiplicativo,  $\widehat{\Omega}_{A/B}^1\{S^{-1}\}$  es un  $A\{S^{-1}\}$ -módulo de tipo finito.
- (2) Para todo ideal primo abierto  $\mathfrak{p} \subset A$ ,  $(\widehat{\Omega}_{A/B}^1)_{\{\mathfrak{p}\}} = \varinjlim_{f \notin \mathfrak{p}} (\Omega_{A/B}^1)_{\{f\}}$  es un  $A_{\{\mathfrak{p}\}}$ -módulo de tipo finito.

A continuación se establecen los preliminares necesarios para la definición del par diferencial  $(\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^1, \widehat{d}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}})$  de un morfismo  $\mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$  en  $\text{Sfn}$ .

2.1.12. **[EGA I, (10.10.1)]** Sea  $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$  con  $A$  un anillo  $J$ -ádico noetheriano,  $X = \mathrm{Spec}(A)$  y  $X' = \mathrm{Spec}(A/J)$  de modo que  $\mathfrak{X} = X_{/X'}$ . Dado  $M$  un  $A$ -módulo, se define el  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -Módulo topológico

$$M^{\Delta} := (\widetilde{M})_{/X'} = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \frac{\widetilde{M}}{\widetilde{J}^{n+1} \widetilde{M}}$$

Además, dado  $M \xrightarrow{u} N$  en  $A\text{-mod}$  se corresponde con un morfismo de  $\mathcal{O}_X$ -Módulos  $\widetilde{M} \xrightarrow{\tilde{u}} \widetilde{N}$  que, a su vez induce un morfismo de  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -Módulos

$$M^{\Delta} \xrightarrow{u^{\Delta}} N^{\Delta} = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \left( \frac{\widetilde{M}}{\widetilde{J}^{n+1} \widetilde{M}} \xrightarrow{\tilde{u}_n} \frac{\widetilde{N}}{\widetilde{J}^{n+1} \widetilde{N}} \right)$$

Se tiene así un funtor aditivo covariante de la categoría de  $A$ -módulos en la categoría de  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -Módulos

$$\begin{array}{ccc} A\text{-mod} & \xrightarrow{\Delta} & \mathrm{Mod}(\mathfrak{X}) \\ M & \rightsquigarrow & M^{\Delta} \end{array} \quad (2.1.12.4)$$

Si  $M \in A\text{-mod}$  y  $\widehat{M}$  denota el módulo completo de  $M$  para la topología  $J$ -ádica, se deduce fácilmente que (véase la definición del funtor  $\Delta$ ):

- (1)  $\Gamma(\mathfrak{X}, M^{\Delta}) = \widehat{M}$ .
- (2) Para cada  $f \in A$ ,  $\Gamma(\mathfrak{D}(f), M^{\Delta}) = M_{\{f\}}$ .
- (3)  $M^{\Delta} = \widehat{M}^{\Delta}$ .

LEMA 2.1.13. *Sea  $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$  con  $A$  un anillo  $J$ -ádico noetheriano. Entonces:*

- (1) *La restricción del funtor  $\Delta$  a la categoría  $A\text{-comp}$  es un funtor pleno y fiel.*
- (2) *El funtor  $\Delta$  es exacto en la categoría de los  $A$ -módulos de tipo finito.*
- (3) **[EGA I, (10.10.2)]** *El funtor  $\Delta$  define una equivalencia de categorías entre los  $A$ -módulos de tipo finito y la categoría  $\mathrm{Coh}(\mathfrak{X})$  de los  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -Módulos coherentes.*

DEMOSTRACIÓN. Para probar (1), veamos que dados  $M, N \in A\text{-comp}$ , entonces

$$\mathrm{Hom}_A(M, N) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}}(M^{\Delta}, N^{\Delta})$$

En efecto, dado  $M \rightarrow N$  en  $A\text{-comp}$ , por **[EGA I, (1.3.8)]** se corresponde biunívocamente con un morfismo  $\widetilde{M} \rightarrow \widetilde{N}$  que, a su vez, induce un morfismo de  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -Módulos  $M^{\Delta} \rightarrow N^{\Delta}$ . Recíprocamente, todo morfismo  $M^{\Delta} \rightarrow N^{\Delta}$  en  $\mathrm{Mod}(\mathfrak{X})$  proporciona un morfismo en  $A\text{-comp}$

$$\Gamma(\mathfrak{X}, M^{\Delta}) = M \rightarrow \Gamma(\mathfrak{X}, N^{\Delta}) = N$$

Para demostrar (2) consideremos  $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$  una sucesión exacta corta de  $A$ -módulos de tipo finito. Entonces dado  $\mathfrak{p} \subset A$  un ideal primo abierto, para todo  $f \in A \setminus \mathfrak{p}$  se verifica que  $0 \rightarrow M'_{\{f\}} \rightarrow M_{\{f\}} \rightarrow M''_{\{f\}} \rightarrow 0$

$M''_{\{f\}} \rightarrow 0$  es una sucesión exacta corta de  $A_{\{f\}}$ -módulos y, por lo tanto, se tiene que

$$0 \rightarrow M'_{\{p\}} \rightarrow M_{\{p\}} \rightarrow M''_{\{p\}} \rightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta de  $A_{\{p\}}$ -módulos.

Por último, por (1) la demostración de (3) se limita a comprobar que dado  $\mathcal{F} \in \text{Coh}(\mathfrak{X})$  el  $A$ -módulo  $M = \Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{F})$  es finitamente generado y  $M^\Delta \cong \mathcal{F}$  (véase [McL, IV, §4, Theorem 1]). Esta comprobación esta hecha en [EGA I, (10.10.2.9)].  $\square$

En la siguiente definición se traslada al contexto geométrico de los esquemas formales localmente noetherianos la definición de derivación continua.

DEFINICIÓN 2.1.14. Sea  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  en  $\text{Sfn}$  y  $\mathcal{F}$  un  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -Módulo topológico. Una  $\mathfrak{Y}$ -derivación continua de  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$  en  $\mathcal{F}$  es un homomorfismo continuo de haces de grupos abelianos  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \xrightarrow{d} \mathcal{F}$  tal que, para cada  $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{X}$  abierto si ponemos  $d_{\mathfrak{U}} = \Gamma(\mathfrak{U}, d)$ , se verifican las siguientes condiciones:

(1) Para todo  $a_1, a_2 \in \Gamma(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$  se tiene que

$$d_{\mathfrak{U}}(a_1 \cdot a_2) = a_1 \cdot d_{\mathfrak{U}}(a_2) + a_2 \cdot d_{\mathfrak{U}}(a_1)$$

(2) Para todo  $\mathfrak{V} \subset \mathfrak{Y}$  abierto tal que  $f(\mathfrak{U}) \subset \mathfrak{V}$  se tiene que:

$$d_{\mathfrak{U}}(b|_{\mathfrak{U}} \cdot a) = b|_{\mathfrak{U}} \cdot d_{\mathfrak{U}}(a),$$

para todo  $b \in \Gamma(\mathfrak{V}, \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}})$ ,  $a \in \Gamma(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$ .

El conjunto de las  $\mathfrak{Y}$ -derivaciones continuas de  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$  en  $\mathcal{F}$  se denota por  $\text{Dercont}_{\mathfrak{Y}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}, \mathcal{F})$ .

OBSERVACIÓN. La Definición 2.1.14 generaliza a esquemas formales la definición de  $Y$ -derivación para un morfismo  $X \rightarrow Y$  de esquemas usuales (cf. [EGA IV<sub>4</sub>, (16.5.1)]).

2.1.15. Sea  $\mathfrak{X} = \text{Spf}(A) \rightarrow \mathfrak{Y} = \text{Spf}(B)$  en  $\text{Sfn}_{\text{af}}$  y consideremos  $J \subset A$  y  $K \subset B$  ideales de definición tales que  $KA \subset J$ . Si  $X = \text{Spec}(A)$ , dados  $M \in A\text{-mod}$  y  $d \in \text{Dercont}_B(A, M)$  se define  $d^\Delta \in \text{Dercont}_{\mathfrak{Y}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}, M^\Delta)$  como

$$\mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \xrightarrow{d^\Delta} M^\Delta = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \left( \frac{\tilde{A}}{\tilde{J}^{n+1} \tilde{A}} \xrightarrow{\tilde{d} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{X_n}} \frac{\tilde{M}}{\tilde{J}^{n+1} \tilde{M}} \right)$$

En particular, la derivación canónica completa de  $A$  sobre  $B$ ,  $\hat{d}_{A/B}$ , induce la  $\mathfrak{Y}$ -derivación continua

$$\mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \xrightarrow{(\hat{d}_{A/B})^\Delta} (\hat{\Omega}_{A/B}^1)^\Delta = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \left( \frac{\tilde{A}}{\tilde{J}^{n+1} \tilde{A}} \xrightarrow{\widetilde{d_{A/B} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{X_n}}} \frac{\widetilde{\Omega_{A/B}^1}}{\tilde{J}^{n+1} \widetilde{\Omega_{A/B}^1}} \right)$$



DEFINICIÓN 2.1.16. Dado  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  en  $\mathbf{Sfn}$  llamamos *Módulo de 1-diferenciales de  $f$*  o también, *Módulo de 1-diferenciales de  $\mathfrak{X}$  sobre  $\mathfrak{Y}$*  y, lo denotaremos indistintamente por  $\widehat{\Omega}_f^1$  o  $\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^1$ , al haz asociado al pre-haz de  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -Módulos topológicos dado localmente por  $(\widehat{\Omega}_{A/B}^1)^\Delta$ , para todo  $\mathfrak{U} = \mathrm{Spf}(A) \subset \mathfrak{X}$  y  $\mathfrak{V} = \mathrm{Spf}(B) \subset \mathfrak{Y}$  abiertos con  $f(\mathfrak{U}) \subset \mathfrak{V}$ . Observemos que  $\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^1$  tiene estructura de  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -Módulo.

Sea  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \xrightarrow{\widehat{d}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}} \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^1$  el morfismo de haces definido localmente por

$$(A \xrightarrow{d_{A/B}} \widehat{\Omega}_{A/B}^1)^\Delta$$

para cada par de abiertos afines  $\mathfrak{U} = \mathrm{Spf}(A) \subset \mathfrak{X}$  y  $\mathfrak{V} = \mathrm{Spf}(B) \subset \mathfrak{Y}$  tales que  $f(\mathfrak{U}) \subset \mathfrak{V}$ . El morfismo  $\widehat{d}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}$  es una  $\mathfrak{Y}$ -derivación continua y se llama *derivación canónica de  $\mathfrak{X}$  sobre  $\mathfrak{Y}$* . Nos referiremos a  $(\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^1, \widehat{d}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}})$  como el *par diferencial de  $\mathfrak{X}$  sobre  $\mathfrak{Y}$* .

2.1.17. Si  $\mathrm{Spf}(A) \rightarrow \mathrm{Spf}(B)$  está en  $\mathbf{Sfn}_{\mathrm{af}}$ , el par diferencial de  $\mathfrak{X}$  sobre  $\mathfrak{Y}$  es

$$((\widehat{\Omega}_{A/B}^1)^\Delta, (\widehat{d}_{A/B})^\Delta)$$

En particular, si  $X = \mathrm{Spec}(A) \rightarrow Y = \mathrm{Spec}(B)$  es un morfismo de esquemas usuales, resulta que  $(\widehat{\Omega}_{X/Y}^1, \widehat{d}_{X/Y}) = (\Omega_{X/Y}^1, d_{X/Y}) = (\widetilde{\Omega}_{A/B}^1, \widetilde{d}_{A/B})$  y, coincide con la definición del par diferencial de un morfismo de esquemas afines (cf. [EGA IV<sub>4</sub>, (16.5.1)]).

PROPOSICIÓN 2.1.18. Sea  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  un morfismo en  $\mathbf{Sfn}$  de pseudo tipo finito. Entonces

$$\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^1 \in \mathrm{Coh}(\mathfrak{X})$$

DEMOSTRACIÓN. Podemos suponer que  $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A) \xrightarrow{f} \mathfrak{Y} = \mathrm{Spf}(B)$  está en  $\mathbf{Sfn}_{\mathrm{af}}$ . Entonces, como  $\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^1 = (\widehat{\Omega}_{A/B}^1)^\Delta$  el resultado se deduce de la Proposición 2.1.9 y de la equivalencia de categorías dada en 2.1.13.(3).  $\square$

EJEMPLO 2.1.19. Sea  $\mathfrak{X}$  en  $\mathbf{Sfn}$ . Entonces por el Ejemplo 2.1.8, se tiene que  $\widehat{\Omega}_{\mathbb{D}_{\mathbb{A}_r}^s/\mathfrak{X}}^1$  es un  $\mathcal{O}_{\mathbb{D}_{\mathbb{A}_r}^s}$ -Módulo localmente libre de rango constante e igual a  $r + s$ .

PROPOSICIÓN 2.1.20. Sea  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  en  $\mathbf{Sfn}$  y sean  $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$  y  $\mathcal{K} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$  Ideales de definición tales que  $f^*(\mathcal{K})\mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \subset \mathcal{J}$ . Entonces

$$(\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^1, \widehat{d}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}) \cong \left( \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \Omega_{X_n/Y_n}^1, \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} d_{X_n/Y_n} \right)$$

DEMOSTRACIÓN. Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , el morfismo  $\widehat{d}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}$  induce una  $Y_n$ -derivación  $\mathcal{O}_{X_n} \xrightarrow{\widehat{d}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}} \otimes \mathcal{O}_{X_n}} \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^1 \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{O}_{X_n}$ . Por [EGA IV<sub>4</sub>, (16.5.3)] existe

un morfismo  $\Omega_{X_n/Y_n}^1 \xrightarrow{u_n} \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^1 \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{O}_{X_n}$  de  $\mathcal{O}_{X_n}$ -Módulos tal que para todo  $m \geq n \geq 0$  los siguientes diagramas son conmutativos

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathcal{O}_{X_m} & \xrightarrow{\widehat{d}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}} \otimes_{\mathcal{O}_{X_m}}} & \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^1 \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{O}_{X_m} & & \\
 \downarrow & \searrow^{d_{X_m/Y_m}} & \nearrow^{u_m} & & \downarrow \\
 & & \Omega_{X_m/Y_m}^1 & & \\
 \downarrow & \searrow^{\widehat{d}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}} \otimes_{\mathcal{O}_{X_n}}} & \nearrow^{u_n} & & \downarrow \\
 \mathcal{O}_{X_n} & \xrightarrow{\widehat{d}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}} \otimes_{\mathcal{O}_{X_n}}} & \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^1 \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{O}_{X_n} & & \\
 \downarrow & \searrow^{d_{X_n/Y_n}} & \nearrow^{u_n} & & \downarrow \\
 & & \Omega_{X_n/Y_n}^1 & & 
 \end{array}$$

Entonces por paso al límite inverso se tiene un morfismo de  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -Módulos

$$\varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \Omega_{X_n/Y_n}^1 \xrightarrow{u} \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^1$$

tal que  $u \circ \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} d_{X_n/Y_n} = \widehat{d}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}$ . Para probar que  $u$  es un isomorfismo

podemos suponer que  $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A) \xrightarrow{f} \mathfrak{Y} = \mathrm{Spf}(B)$  está en  $\mathrm{Sfn}_{\mathrm{af}}$  y entonces el resultado se deduce de 2.1.6.  $\square$

**OBSERVACIÓN.** En [LNS, 2.6] se define el Módulo de diferenciales de un morfismo  $\mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$  en  $\mathrm{Sfn}$  con la caracterización dada en la Proposición 2.1.20.

Dado  $X \rightarrow Y$  un morfismo de esquemas en [EGA IV<sub>4</sub>, (16.5.3)] se establece que  $(\Omega_{X/Y}^1, d_{X/Y})$  es el par universal del funtor representable  $\mathcal{F} \in \mathrm{Mod}(X) \rightsquigarrow \mathrm{Der}_Y(\mathcal{O}_X, \mathcal{F})$ . En el Teorema 2.1.22 se generaliza este resultado para un morfismo  $\mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$  en  $\mathrm{Sfn}$ . Para ello, necesitamos definir la categoría  $\mathrm{Comp}(\mathfrak{X})$  de los  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -Módulos completos.

2.1.21. Dado  $\mathfrak{X}$  en  $\mathrm{Sfn}$  y  $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$  un Ideal de definición de  $\mathfrak{X}$  denotaremos por  $\mathrm{Comp}(\mathfrak{X})$  la categoría de los  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -Módulos  $\mathcal{F}$  tales que

$$\mathcal{F} = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} (\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{O}_{X_n})$$

Se comprueba fácilmente que la definición es independiente del Ideal de definición escogido de  $\mathfrak{X}$ .

Por ejemplo:

- (1) Dado  $\mathfrak{X} = \text{Spf}(A)$  en  $\text{Sfn}_{\text{af}}$  y  $J \subset A$  un ideal de definición para todo  $A$ -módulo  $M$  resulta que

$$M^\Delta = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \frac{\widetilde{M}}{\widetilde{J^{n+1}M}} \in \text{Comp}(\mathfrak{X})$$

- (2) Sea  $\mathfrak{X}$  en  $\text{Sfn}$ . Para todo  $\mathcal{F} \in \text{Coh}(\mathfrak{X})$ , por [EGA I, (10.11.3)] se verifica que  $\mathcal{F} = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} (\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{O}_{X_n})$  y, por lo tanto,  $\text{Coh}(\mathfrak{X})$  es

una subcategoría plena de  $\text{Comp}(\mathfrak{X})$ . En particular, dado  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  un morfismo en  $\text{Sfn}$  de pseudo tipo finito, por 2.1.18, se tiene que  $\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^1 \in \text{Comp}(\mathfrak{X})$ .

Estamos ya en condiciones de probar que dado  $\mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$  un morfismo en  $\text{Sfn}$  de pseudo tipo finito,  $(\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^1, \widehat{d}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}})$  es el par universal del funtor representable

$$\mathcal{F} \in \text{Comp}(\mathfrak{X}) \rightsquigarrow \text{Dercont}_{\mathfrak{Y}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}, \mathcal{F})$$

TEOREMA 2.1.22. *Sea  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  un morfismo en  $\text{Sfn}$ . Entonces dado  $\mathcal{F} \in \text{Comp}(\mathfrak{X})$  se tiene un isomorfismo canónico*

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}(\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^1, \mathcal{F}) & \xrightarrow{\cong} & \text{Dercont}_{\mathfrak{Y}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}, \mathcal{F}) \\ u & \rightsquigarrow & u \circ \widehat{d}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}} \end{array}$$

DEMOSTRACIÓN. Sean  $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$  y  $\mathcal{K} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$  Ideales de definición tales que  $f^*(\mathcal{K})\mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \subset \mathcal{J}$  y respecto a los cuales  $f = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} (X_n \xrightarrow{f_n} Y_n)$ . Vamos a definir la aplicación inversa de  $\varphi$ . Dada  $d \in \text{Dercont}_{\mathfrak{Y}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}, \mathcal{F})$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$  se verifica que

$$d \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{O}_{X_n} \in \text{Der}_{Y_n}(\mathcal{O}_{X_n}, \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{O}_{X_n}) \quad \text{y} \quad d = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} (d \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{O}_{X_n})$$

Por otro lado, resulta que

$$\text{Hom}(\Omega_{X_n/Y_n}^1, \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{O}_{X_n}) \cong \text{Der}_{Y_n}(\mathcal{O}_{X_n}, \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{O}_{X_n})$$

y, por lo tanto, existe un único morfismo de  $\mathcal{O}_{X_n}$ -Módulos

$$\Omega_{X_n/Y_n}^1 \xrightarrow{u_n} \mathcal{F}_n$$

tal que  $u_n \circ d_{X_n/Y_n} = d \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{O}_{X_n}$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Además, para cada par de enteros  $m \geq n \geq 0$  existe un único morfismo de  $\mathcal{O}_{X_m}$ -Módulos

$\Omega_{X_m/Y_m}^1 \xrightarrow{v_{nm}} \Omega_{X_n/Y_n}^1$  de modo que el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{O}_{X_m} & \xrightarrow{d_{X_m/Y_m}} & \Omega_{X_m/Y_m}^1 & \xrightarrow{u_m} & \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{O}_{X_m} \\ \text{can.} \downarrow & & \downarrow v_{nm} & & \downarrow \text{can.} \\ \mathcal{O}_{X_n} & \xrightarrow{d_{X_n/Y_n}} & \Omega_{X_n/Y_n}^1 & \xrightarrow{u_n} & \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{O}_{X_n} \end{array}$$

es conmutativo. Es decir,  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es un sistema inverso de morfismos y, por la Proposición 2.1.20 induce un morfismo de  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -Módulos

$$\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^1 \xrightarrow{u} \mathcal{F} = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{O}_{X_n}$$

tal que  $u \circ \widehat{d}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}} = d$ . Si definimos

$$\text{Dercont}_{\mathfrak{Y}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}, \mathcal{F}) \xrightarrow[\quad d]{\quad \psi} \text{Hom}(\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^1, \mathcal{F}), \quad \rightsquigarrow \quad u$$

por la construcción hecha se comprueba fácilmente que  $\psi$  y  $\varphi$  son aplicaciones inversas.  $\square$

LEMA 2.1.23. *Sea  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  un morfismo en  $\text{Sfn}$ . Entonces dado  $\mathcal{F} \in \text{Comp}(\mathfrak{X})$  se tiene que*

$$f_*\mathcal{F} = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} (f_*\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}} \mathcal{O}_{Y_n})$$

y, por lo tanto,  $f_*\mathcal{F}$  está en  $\text{Comp}(\mathfrak{Y})$ .

DEMOSTRACIÓN. Sean  $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$  y  $\mathcal{K} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$  Ideales de definición tales que  $f^*(\mathcal{K})\mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \subset \mathcal{J}$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$  se tienen los morfismos canónicos  $f_*\mathcal{F} \rightarrow f_*\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}} \mathcal{O}_{Y_n}$  que inducen el morfismo de  $\mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$ -Módulos

$$f_*\mathcal{F} \longrightarrow \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} (f_*\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}} \mathcal{O}_{Y_n})$$

Para probar que es un isomorfismo podemos suponer que  $\mathfrak{X} = \text{Spf}(A) \xrightarrow{f} \mathfrak{Y} = \text{Spf}(B)$  está en  $\text{Sfn}_{\text{af}}$ ,  $\mathcal{J} = J^\Delta$  y  $\mathcal{K} = K^\Delta$  con  $J \subset A$ ,  $K \subset B$  ideales de definición tales que  $KA \subset J$ . Entonces  $M = \Gamma(\mathfrak{Y}, f_*\mathcal{F})$  es un  $B$ -módulo completo para la topología  $f^{-1}(J)$ -ádica y, como  $K \subset f^{-1}(J)$  resulta que

$$M = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \frac{M}{K^{n+1}M}$$

de donde se sigue el resultado.  $\square$

PROPOSICIÓN 2.1.24. *Dado un diagrama conmutativo en  $\text{Sfn}$  de morfismos de pseudo tipo finito:*

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{X} & \longrightarrow & \mathfrak{Y} \\ \uparrow g & & \uparrow \\ \mathfrak{X}' & \xrightarrow{h} & \mathfrak{Y}' \end{array}$$

existe un morfismo de  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}$ -Módulos  $g^*\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^1 \longrightarrow \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}'/\mathfrak{Y}'}^1$  definido localmente por  $\widehat{d}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}a \otimes 1 \rightsquigarrow \widehat{d}_{\mathfrak{X}'/\mathfrak{Y}'}g(a)$  (equivalentemente, existe un morfismo de  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -Módulos  $\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^1 \longrightarrow g_*\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}'/\mathfrak{Y}'}^1$  definido localmente por  $\widehat{d}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}} \rightsquigarrow \widehat{d}_{\mathfrak{X}'/\mathfrak{Y}'}g(a)$ ). Si el diagrama es cartesiano, el morfismo anterior es un isomorfismo.

DEMOSTRACIÓN. El morfismo  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \rightarrow g_*\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'} \xrightarrow{g^*\widehat{d}_{\mathfrak{X}'/\mathfrak{Y}'}} g_*\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}'/\mathfrak{Y}'}^1$  es una  $\mathfrak{Y}$ -derivación continua. Aplicando la Proposición 2.1.18 y el Lema 2.1.23 se tiene que  $g_*\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}'/\mathfrak{Y}'}^1 \in \text{Comp}(\mathfrak{X})$  y, entonces por el Teorema 2.1.22 existe un único morfismo de  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -Módulos  $\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^1 \rightarrow g_*\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}'/\mathfrak{Y}'}^1$  tal que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}} & \xrightarrow{\widehat{d}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}} & \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ g_*\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'} & \xrightarrow{g^*\widehat{d}_{\mathfrak{X}'/\mathfrak{Y}'}} & g_*\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}'/\mathfrak{Y}'}^1 \end{array}$$

Equivalentemente, existe un morfismo de  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}$ -Módulos  $g^*\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^1 \rightarrow \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}'/\mathfrak{Y}'}^1$  que localmente viene dado por  $\widehat{d}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}a \otimes 1 \rightsquigarrow \widehat{d}_{\mathfrak{X}'/\mathfrak{Y}'}g(a)$ .

Supongamos que el cuadrado es cartesiano. Para probar que la aplicación  $g^*\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^1 \longrightarrow \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}'/\mathfrak{Y}'}^1$  es un isomorfismo, podemos suponer que  $\mathfrak{X} = \text{Spf}(A)$ ,  $\mathfrak{Y} = \text{Spf}(B)$ ,  $\mathfrak{Y}' = \text{Spf}(B')$  y  $\mathfrak{X}' = \text{Spf}(A \widehat{\otimes}_B B')$  están en  $\text{Sfn}_{\text{af}}$  y entonces el resultado es consecuencia de 2.1.10.(1).  $\square$

Con las notaciones de la proposición anterior, si  $\mathfrak{Y} = \mathfrak{Y}'$  el morfismo  $g^*\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^1 \longrightarrow \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}'/\mathfrak{Y}}^1$  se denota por  $dg$  y se denomina *la diferencial de  $g$  sobre  $\mathfrak{Y}$* .

COROLARIO 2.1.25. Dado  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  un morfismo en  $\text{Sfn}$  de tipo finito consideremos  $\mathcal{K} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$  y  $\mathcal{J} = f^*(\mathcal{K})\mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$  Ideales de definición respecto a los cuales  $f = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} (X_n \xrightarrow{f_n} Y_n)$ . Entonces para cada  $n \in \mathbb{N}$  se verifica que

$$\Omega_{X_n/Y_n}^1 \cong \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^1 \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{O}_{X_n}$$

DEMOSTRACIÓN. Como  $f$  es un morfismo ádico, por la Proposición 1.2.5 se tiene que los diagramas

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{X} & \xrightarrow{f} & \mathfrak{Y} \\ \uparrow & & \uparrow \\ X_n & \xrightarrow{f_n} & Y_n \end{array}$$

son cartesianos,  $\forall n \geq 0$ . Entonces el corolario se deduce de la proposición.  $\square$

En el siguiente ejemplo se muestra que si el morfismo no es ádico, el corolario anterior no se verifica.

EJEMPLO 2.1.26. Sea  $K$  un cuerpo y  $\mathbb{D}_K^1 \xrightarrow{p} \text{Spec}(K)$  el morfismo de proyección del disco formal de dimensión 1 sobre  $\text{Spec}(K)$ . Dado el ideal de definición  $[[T]] \subset K[[T]]$  de modo que  $p = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} p_n$  se verifica que  $\Omega_{p_0}^1 = 0$  y, sin embargo,  $\widehat{\Omega}_p^1 \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{D}_K^1}} \mathcal{O}_{\text{Spec}(K)} \stackrel{2.1.19}{=} ((K[[T]])^\Delta \widehat{dT}) \otimes_{(K[[T]])^\Delta} \widetilde{K} \cong \widetilde{K} \neq 0$ .

PROPOSICIÓN 2.1.27. (*Primera sucesión exacta fundamental*) Sean  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  y  $\mathfrak{Y} \xrightarrow{g} \mathfrak{S}$  dos morfismos en  $\text{Sfn}$  de pseudo tipo finito. Existe una sucesión exacta de  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -Módulos coherentes

$$f^*(\widehat{\Omega}_{\mathfrak{Y}/\mathfrak{S}}^1) \xrightarrow{\Phi} \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{S}}^1 \xrightarrow{\Psi} \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^1 \rightarrow 0 \quad (2.1.27.5)$$

donde  $\Phi$  y  $\Psi$  están definidas localmente por

$$\widehat{d}_{\mathfrak{Y}/\mathfrak{S}} b \otimes 1 \rightsquigarrow \widehat{d}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{S}} f(b) \quad \widehat{d}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{S}} a \rightsquigarrow \widehat{d}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}} a$$

DEMOSTRACIÓN. El morfismo de  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -Módulos  $f^*\widehat{\Omega}_{\mathfrak{Y}/\mathfrak{S}}^1 \xrightarrow{\Phi} \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{S}}^1$  es la diferencial de  $f$  sobre  $\mathfrak{S}$  y está definido localmente por  $\widehat{d}_{\mathfrak{Y}/\mathfrak{S}} b \otimes 1 \rightsquigarrow \widehat{d}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{S}} f(b)$ . Por otro lado, como  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \xrightarrow{\widehat{d}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}} \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^1$  es una  $\mathfrak{S}$ -derivación continua, por el Teorema 2.1.22 existe un único morfismo de  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -Módulos  $\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{S}}^1 \xrightarrow{\Psi} \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^1$  tal que  $\Psi \circ \widehat{d}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{S}} = \widehat{d}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}$ .

Para probar la exactitud podemos suponer que  $\mathfrak{X} = \text{Spf}(A) \xrightarrow{f} \mathfrak{Y} = \text{Spf}(B)$ ,  $\mathfrak{Y} \xrightarrow{g} \mathfrak{S} = \text{Spf}(C)$  son morfismos de pseudo tipo finito. La sucesión de  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -Módulos coherentes (2.1.27.5) se corresponde vía la equivalencia de categorías 2.1.13.(3) entre la categoría de los  $A$ -módulos de tipo finito y  $\text{Coh}(\mathfrak{X})$ , con la sucesión

$$\widehat{\Omega}_{B/C}^1 \otimes_B A \xrightarrow{\Phi} \widehat{\Omega}_{A/C}^1 \xrightarrow{\Psi} \widehat{\Omega}_{A/B}^1 \rightarrow 0$$

Por 2.1.13.(2) basta probar pues que la anterior sucesión es exacta. Para ello, consideremos  $J \subset A$ ,  $K \subset B$  y  $L \subset C$  ideales de definición tales que  $LB \subset K$ ,  $KA \subset J$  y para cada  $n \in \mathbb{N}$  pongamos  $A_n = A/J^{n+1}$ ,  $B_n = B/K^{n+1}$  y  $C_n = C/L^{n+1}$ . Para cada par de enteros  $m \geq n \geq 0$  se tiene un

diagrama conmutativo de  $A_m$ -módulos de tipo finito

$$\begin{array}{ccccccc}
 \Omega_{B_m/C_m}^1 \otimes_{B_m} A_m & \xrightarrow{\Phi_m} & \Omega_{A_m/C_m}^1 & \xrightarrow{\Psi_m} & \Omega_{A_m/B_m}^1 & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow & \searrow & \nearrow & \downarrow & \downarrow & & \\
 & & \text{Ker } \Psi_n & & & & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 \Omega_{B_n/C_n}^1 \otimes_{B_n} A_n & \xrightarrow{\Phi_n} & \Omega_{A_n/C_n}^1 & \xrightarrow{\Psi_n} & \Omega_{A_n/B_n}^1 & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow & \searrow & \nearrow & \downarrow & \downarrow & & \\
 & & \text{Ker } \Psi_n & & & & 
 \end{array}$$

donde las sucesiones horizontales se corresponden con las primeras sucesiones exactas fundamentales para los morfismos de anillos (discretos)  $C_n \xrightarrow{g_n} B_n \xrightarrow{f_n} A_n$  y  $C_m \xrightarrow{g_m} B_m \xrightarrow{f_m} A_m$ . Como las flechas verticales son sobreyectivas e  $\text{Im } \Phi$  es un  $A$ -módulo de tipo finito se deduce que

$$\begin{aligned}
 \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} (\widehat{\Omega}_{B_n/C_n}^1 \otimes_{B_n} A_n \xrightarrow{\Phi_n} \widehat{\Omega}_{A_n/C_n}^1 \xrightarrow{\Psi_n} \widehat{\Omega}_{A_n/B_n}^1 \rightarrow 0) = \\
 \widehat{\Omega}_{B/C}^1 \otimes_B A \xrightarrow{\Phi} \widehat{\Omega}_{A/C}^1 \xrightarrow{\Psi} \widehat{\Omega}_{A/B}^1 \rightarrow 0
 \end{aligned}$$

es una sucesión exacta.  $\square$

2.1.28. Sea  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  un morfismo en  $\text{Sfn}$  de pseudo tipo finito, y sean  $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$  y  $\mathcal{K} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$  Ideales de definición con  $f^*(\mathcal{K})\mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \subset \mathcal{J}$  de modo que  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y} = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} (X_n \xrightarrow{f_n} Y_n)$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , de la Primera sucesión

exacta fundamental (2.1.27.5) asociada a  $X_n \xrightarrow{f_n} Y_n \hookrightarrow \mathfrak{Y}$  se deduce que  $\widehat{\Omega}_{X_n/\mathfrak{Y}}^1 = \Omega_{X_n/\mathfrak{Y}}^1 = \Omega_{X_n/Y_n}^1$ .

2.1.29. Dado  $\mathfrak{X}' \xrightarrow{i} \mathfrak{X}$  un encaje cerrado en  $\text{Sfn}$  (Definición 1.2.13) se tiene que el morfismo  $i^*(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}) \xrightarrow{i^\sharp} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}$  es sobreyectivo. Si  $\mathcal{K} := \ker(i^\sharp)$  llamamos *haz conormal de  $\mathfrak{X}'$  sobre  $\mathfrak{X}$*  a  $\mathcal{C}_{\mathfrak{X}'/\mathfrak{X}} := \mathcal{K}/\mathcal{K}^2$ .

Resulta fácil comprobar que  $\mathcal{C}_{\mathfrak{X}'/\mathfrak{X}}$  verifica las siguientes propiedades:

- (1) Es un  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}$ -Módulo coherente.
- (2) Si  $\mathfrak{X}' \subset \mathfrak{X}$  es un subesquema cerrado dado por un Ideal coherente  $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$  (véase la Definición 1.2.13), entonces  $\mathcal{C}_{\mathfrak{X}'/\mathfrak{X}} = i^*(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2)$ .

PROPOSICIÓN 2.1.30. (*Segunda sucesión exacta fundamental*) Sea  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  un morfismo en  $\text{Sfn}$  de pseudo tipo finito y  $\mathfrak{X}' \xrightarrow{i} \mathfrak{X}$  un encaje cerrado. Existe una sucesión exacta de  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}$ -Módulos coherentes

$$\mathcal{C}_{\mathfrak{X}'/\mathfrak{X}} \xrightarrow{\delta} i^* \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^1 \xrightarrow{\Phi} \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}'/\mathfrak{Y}}^1 \rightarrow 0 \quad (2.1.30.6)$$

DEMOSTRACIÓN. El morfismo  $\Phi$  es el dado por la Proposición 2.1.24 y está definido por  $\widehat{d}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}} a \otimes 1 \rightsquigarrow \widehat{d}_{\mathfrak{X}'/\mathfrak{Y}} i(a)$ . Si  $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$  es el Ideal que define al subesquema cerrado  $i(\mathfrak{X}') \subset \mathfrak{X}$  el morfismo  $\Psi$  es el inducido por  $\mathcal{I} \xrightarrow{\widehat{d}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}|_{\mathcal{I}}} \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^1$ . Para probar la exactitud podemos suponer que  $\mathfrak{X}' = \text{Spf}(A/I) \hookrightarrow \mathfrak{X} = \text{Spf}(A)$ ,  $\mathfrak{Y} = \text{Spf}(B)$  están en  $\text{Sfn}_{\text{af}}$ . Bajo estas hipótesis la Segunda sucesión exacta fundamental se corresponde vía la equivalencia de categorías 2.1.13.(3) entre la categoría de los  $A/I$ -módulos de tipo finito y  $\text{Coh}(\mathfrak{X}')$ , con la sucesión

$$\frac{I}{I^2} \xrightarrow{\delta} \widehat{\Omega}_{A/B}^1 \otimes_A \frac{A}{I} \xrightarrow{\Phi} \widehat{\Omega}_{(A/I)/B}^1 \rightarrow 0$$

Aplicando 2.1.13.(2) es suficiente ver que esta sucesión es exacta. Sean  $J \subset A$  y  $K \subset B$  ideales de definición tales que  $KA \subset B$  y llamemos  $A_n = A/J^{n+1}$ ,  $B_n = B/K^{n+1}$ ,  $I_n = I + J^{n+1}/J^{n+1}$  y  $A'_n = A_n/I_n$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Entonces se tienen los siguientes diagramas conmutativos de  $A'_n$ -módulos de tipo finito

$$\begin{array}{ccccccc} \frac{I_m}{I_m^2} & \xrightarrow{\delta_m} & \Omega_{A_m/B_m}^1 \otimes_{A_m} A'_m & \xrightarrow{\Phi_m} & \Omega_{A'_m/B_m}^1 & \longrightarrow & 0 \\ & \searrow & \uparrow & & \downarrow & & \\ & & \text{Ker } \Phi_m & & \downarrow & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \frac{I_n}{I_n^2} & \xrightarrow{\delta_n} & \Omega_{A_n/B_n}^1 \otimes_{A_n} A'_n & \xrightarrow{\Phi_n} & \Omega_{A'_n/B_n}^1 & \longrightarrow & 0 \\ & \searrow & \uparrow & & \downarrow & & \\ & & \text{Ker } \Phi_n & & \downarrow & & \end{array}$$

donde las sucesiones horizontales son las segundas sucesiones exactas fundamentales de los homomorfismos de anillos (discretos)  $B_n \rightarrow A_n \rightarrow A_n/I_n$  y  $B_m \rightarrow A_m \rightarrow A_m/I_m$  y las flechas verticales son sobreyectivas. Como  $\text{Im } \delta$  es un  $A/I$ -módulo de tipo finito resulta que

$$\begin{aligned} \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \left( \frac{I_n}{I_n^2} \xrightarrow{\delta_n} \Omega_{A_n/B_n}^1 \otimes_{A_n} A'_n \xrightarrow{\Phi_n} \Omega_{A'_n/B_n}^1 \rightarrow 0 \right) = \\ \frac{I}{I^2} \xrightarrow{\delta} \widehat{\Omega}_{A/B}^1 \otimes_A \frac{A}{I} \xrightarrow{\Phi} \widehat{\Omega}_{(A/I)/B}^1 \rightarrow 0 \end{aligned}$$



es una sucesión exacta.  $\square$

OBSERVACIÓN. A lo largo de este trabajo y, análogamente a lo hecho en las referencias habituales (por ejemplo, [EGA IV<sub>4</sub>], [AK] y [H1]) en el uso de la Segunda sucesión exacta fundamental en Sch, cometeremos una pequeña imprecisión: escribiremos la Segunda sucesión exacta fundamental asociada a los morfismos  $\mathfrak{X}' \xrightarrow{i} \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$  en Sfn donde  $i(\mathfrak{X}') \subset \mathfrak{X}'$  es un subesquema cerrado dado por un Ideal  $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ , en cualquiera de las siguientes formas:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{\mathfrak{X}'/\mathfrak{X}} &\xrightarrow{\delta} i^* \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^1 \xrightarrow{\Phi} \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}'/\mathfrak{Y}}^1 \rightarrow 0 \\ \mathcal{C}_{\mathfrak{X}'/\mathfrak{X}} &\xrightarrow{\delta} \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^1 \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}'} \xrightarrow{\Phi} \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}'/\mathfrak{Y}}^1 \rightarrow 0 \\ \frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I}^2} &\xrightarrow{\delta} \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^1 \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}'} \xrightarrow{\Phi} \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}'/\mathfrak{Y}}^1 \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Al igual que ocurre en Sch la Segunda sucesión exacta fundamental proporciona una descripción local del módulo de diferenciales de un morfismo  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  en Sfn de pseudo tipo finito.

2.1.31. Sea  $\mathfrak{X} = \text{Spf}(A) \xrightarrow{f} \mathfrak{Y} = \text{Spf}(B)$  un morfismo en  $\text{Sfn}_{\text{af}}$  de pseudo tipo finito, de modo que se factoriza en

$$\mathfrak{X} = \text{Spf}(A) \xrightarrow{j} \mathbb{D}_{\mathbb{A}_{\mathfrak{Y}}}^s = \text{Spf}(B\{\mathbf{T}\}[[\mathbf{Z}]]) \xrightarrow{p} \mathfrak{Y} = \text{Spf}(B)$$

donde  $r, s \in \mathbb{N}$ ,  $p$  es la proyección canónica y  $j$  es un encaje cerrado dado por un Ideal  $\mathcal{I} = I^\Delta \subset \mathcal{O}_{\mathbb{D}_{\mathbb{A}_{\mathfrak{Y}}}^s}$  con  $I = \langle P_1, P_2, \dots, P_k \rangle \subset B\{\mathbf{T}\}[[\mathbf{Z}]]$ . La

Segunda sucesión exacta fundamental (2.1.30.6) asociada a  $\mathfrak{X} \xrightarrow{j} \mathbb{D}_{\mathbb{A}_{\mathfrak{Y}}}^s \xrightarrow{p} \mathfrak{Y}$  se corresponde vía la equivalencia de categorías 2.1.13.(3) entre la categoría de los  $A$ -módulos de tipo finito y  $\text{Coh}(\mathfrak{X})$ , con la sucesión

$$\frac{I}{I^2} \xrightarrow{\delta} \widehat{\Omega}_{B\{\mathbf{T}\}[[\mathbf{Z}]]/B}^1 \otimes_{B\{\mathbf{T}\}[[\mathbf{Z}]]} A \xrightarrow{\Phi} \widehat{\Omega}_{A/B}^1 \rightarrow 0 \quad (2.1.31.7)$$

Por otra parte, si llamamos  $\widehat{d} = \widehat{d}_{B\{\mathbf{T}\}[[\mathbf{Z}]]/B}$ , hemos visto en el Ejemplo 2.1.8 que  $\{\widehat{dT}_1, \widehat{dT}_2, \dots, \widehat{dT}_r, \widehat{dZ}_1, \dots, \widehat{dZ}_s\}$  es una base del  $B\{\mathbf{T}\}[[\mathbf{Z}]]$ -módulo libre  $\widehat{\Omega}_{B\{\mathbf{T}\}[[\mathbf{Z}]]/B}^1$  y, por lo tanto, si  $a_1, a_2, \dots, a_r, a_{r+1}, \dots, a_{r+s}$  son las imágenes de  $T_1, T_2, \dots, T_r, Z_1, \dots, Z_s$  en  $A$ , por la definición de  $\Phi$  se tiene que

$$\widehat{\Omega}_{A/B}^1 = \langle \widehat{d}_{A/B} a_1, \widehat{d}_{A/B} a_2, \dots, \widehat{d}_{A/B} a_r, \widehat{d}_{A/B} a_{r+1}, \dots, \widehat{d}_{A/B} a_{r+s} \rangle$$

y por la exactitud de (2.1.31.7) se verifica que

$$\widehat{\Omega}_{A/B}^1 \cong \frac{\widehat{\Omega}_{B\{\mathbf{T}\}[[\mathbf{Z}]]/B}^1 \otimes_{B\{\mathbf{T}\}[[\mathbf{Z}]]} A}{\langle \widehat{dP}_1 \otimes 1, \widehat{dP}_2 \otimes 1, \dots, \widehat{dP}_k \otimes 1 \rangle}$$

o, equivalentemente, como el funtor  $\Delta$  es exacto,

$$\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^1 \cong \frac{\widehat{\Omega}_{\mathbb{D}_{\mathbb{A}_R^s}^s/\mathfrak{Y}}^1 \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{D}_{\mathbb{A}_R^s}^s/\mathfrak{Y}}} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}}{\langle \widehat{dP}_1 \otimes 1, \widehat{dP}_2 \otimes 1, \dots, \widehat{dP}_k \otimes 1 \rangle^\Delta}$$

## 2.2. Definiciones de las condiciones infinitesimales

En esta sección extendemos la definición clásica de Grothendieck de las condiciones infinitesimales en la categoría de esquemas (*cf.* [EGA IV<sub>4</sub>, (17.1.1)]) al caso de un morfismo  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  en Sfn y estudiamos algunas de sus propiedades.

**DEFINICIÓN 2.2.1.** Sea  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  un morfismo en Sfn. Se dice que  $f$  es *formalmente liso* (*formalmente no ramificado* o *formalmente étale*) si satisface la siguiente condición de levantamiento:

*Para todo  $\mathfrak{Y}$ -esquema afín  $Z$  y para todo  $T \hookrightarrow Z$  subesquema cerrado dado por un Ideal  $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_Z$  de cuadrado nulo la aplicación inducida*

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{Y}}(Z, \mathfrak{X}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathfrak{Y}}(T, \mathfrak{X}) \quad (2.2.1.8)$$

*es sobreyectiva (inyectiva o biyectiva, respectivamente).*

Así, se tiene que  $f$  es formalmente étale si, y sólo si, es formalmente liso y formalmente no ramificado.

Resaltamos que en la condición de levantamiento (2.2.1.8) los esquemas  $T$  y  $Z$  no son necesariamente localmente noetherianos.

La definición coincide con la definición clásica de las condiciones infinitesimales dada en [EGA IV<sub>4</sub>, (17.3.1)] para un morfismo de  $f$  de esquemas (usuales).

**OBSERVACIÓN.** En la condición de levantamiento (2.2.1.8) podemos suponer que el Ideal  $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_Z$  es nilpotente. En efecto, sea  $Z$  un  $\mathfrak{Y}$ -esquema afín y  $T \subset Z$  un subesquema cerrado dado por un Ideal  $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_Z$  tal que  $\mathcal{I}^{n+1} = 0$ , para algún  $n \in \mathbb{N}$ . Si llamamos  $T_k$  al subesquema cerrado de  $Z$  dado por el Ideal  $\mathcal{I}^{k+1} \subset \mathcal{O}_Z$ , se verifica que para todo  $0 \leq k \leq n$ , los morfismos canónicos  $T_k \hookrightarrow T_{k+1}$  son encajes cerrados dados por un Ideal de cuadrado nulo. Entonces, la aplicación  $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{Y}}(T_{k+1}, \mathfrak{X}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathfrak{Y}}(T_k, \mathfrak{X})$  es sobreyectiva (inyectiva o biyectiva), para todo  $0 \leq k \leq n$  y, por lo tanto,  $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{Y}}(Z, \mathfrak{X}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathfrak{Y}}(T, \mathfrak{X})$  es sobreyectiva (inyectiva o biyectiva, respectivamente).

Dado  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  en Sfn, en la siguiente proposición se prueba que la condición de levantamiento (2.2.1.8) se extiende a todo  $\mathfrak{Y}$ -esquema formal afín noetheriano  $\mathfrak{Z}$  y a todo  $\mathfrak{T} \hookrightarrow \mathfrak{Z}$  subesquema formal cerrado dado por un Ideal  $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{Z}}$  de cuadrado nulo.

**PROPOSICIÓN 2.2.2.** *Sea  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  en Sfn. Si el morfismo  $f$  es formalmente liso (formalmente no ramificado o formalmente étale), entonces para*

todo  $\mathfrak{Y}$ -esquema formal afín noetheriano  $\mathfrak{Z}$  y para todo  $\mathfrak{T} \hookrightarrow \mathfrak{Z}$  subesquema formal cerrado dado por un Ideal  $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{Z}}$  de cuadrado nulo, la aplicación inducida

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{Y}}(\mathfrak{Z}, \mathfrak{X}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathfrak{Y}}(\mathfrak{T}, \mathfrak{X}) \quad (2.2.2.9)$$

es sobreyectiva (inyectiva o biyectiva, respectivamente).

DEMOSTRACIÓN. Consideremos  $\mathfrak{T} = \mathrm{Spf}(C/I) \hookrightarrow \mathfrak{Z} = \mathrm{Spf}(C)$  un subesquema formal cerrado dado por  $I \subset C$  un ideal de cuadrado nulo. Elegido un ideal de definición  $L \subset C$  el encaje  $\mathfrak{T} \hookrightarrow \mathfrak{Z}$  se expresa de la forma

$$\varinjlim_{n \in \mathbb{N}} (T_n = \mathrm{Spec}\left(\frac{C}{I + L^{n+1}}\right) \xrightarrow{j_n} Z_n = \mathrm{Spec}\left(\frac{C}{L^{n+1}}\right))$$

donde los morfismos  $j_n$  son encajes cerrados de esquemas afines dados por un Ideal de cuadrado nulo. Dado  $\mathfrak{T} \xrightarrow{u} \mathfrak{X}$  un  $\mathfrak{Y}$ -morfismo, denotemos por  $u'_n$  los morfismos  $T_n \hookrightarrow \mathfrak{T} \xrightarrow{u} \mathfrak{X}$  de modo que los diagramas

$$\begin{array}{ccc} T_n & \xhookrightarrow{j_n} & Z_n \\ u'_n \downarrow & & \downarrow \\ \mathfrak{X} & \xrightarrow{f} & \mathfrak{Y} \end{array}$$

son conmutativos, para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Supongamos que  $f$  es formalmente liso y construyamos una colección de  $\mathfrak{Y}$ -morfismos  $Z_n \xrightarrow{v'_n} \mathfrak{X}$  tal que  $v'_n|_{T_n} = u'_n$  y  $v'_n|_{Z_{n-1}} = v'_{n-1}$ . Se tendría así un  $\mathfrak{Y}$ -morfismo  $v := \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} (Z_n \xrightarrow{v'_n} \mathfrak{X})$  tal que  $v|_{\mathfrak{T}} = u$ . En efecto, como  $f$

es formalmente liso, existe un  $\mathfrak{Y}$ -morfismo  $Z_0 \xrightarrow{v'_0} \mathfrak{X}$  tal que  $v'_0|_{T_0} = u'_0$ . Por inducción en  $n$ , supongamos que hemos construido  $\mathfrak{Y}$ -morfismos  $Z_n \xrightarrow{v'_n} \mathfrak{X}$  tales que  $v'_n|_{T_n} = u'_n$  y  $v'_n|_{Z_{n-1}} = v'_{n-1}$ , y definamos  $v'_{n+1}$ . Los morfismos  $u'_{n+1}$  y  $v'_n$  inducen un  $\mathfrak{Y}$ -morfismo

$$T_{n+1} \coprod_{T_n} Z_n = \mathrm{Spec}\left(\frac{C}{I + L^{n+2}} \times_{\frac{C}{I + L^{n+1}}} \frac{C}{L^{n+1}}\right) \xrightarrow{w'_{n+1}} \mathfrak{X}$$

de modo que el diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 T_{n+1} & \xrightarrow{j_{n+1}} & Z_{n+1} & & \\
 \uparrow & \searrow & \uparrow & & \\
 & & T_{n+1} \amalg_{T_n} Z_n & & \\
 & & \downarrow & & \\
 T_n & \xrightarrow{u'_n} & \mathfrak{X} & \xrightarrow{f} & \mathfrak{Y} \\
 & \searrow & \downarrow & & \\
 & & Z_n & & \\
 & & \downarrow & & \\
 & & \mathfrak{X} & & \\
 & & \downarrow & & \\
 & & \mathfrak{Y} & & 
 \end{array}$$

es conmutativo. Entonces, por ser  $f$  formalmente liso e  $i$  un encaje cerrado dado por un Ideal de cuadrado nulo,  $w'_{n+1}$  se levanta a un  $\mathfrak{Y}$ -morfismo

$$Z_{n+1} \xrightarrow{v'_{n+1}} \mathfrak{X} \text{ que verifica } v'_{n+1}|_{T_{n+1}} = u'_{n+1} \text{ y } v'_{n+1}|_{Z_n} = w'_{n+1}|_{Z_n} = v'_n.$$

Si  $f$  es formalmente no ramificado, supongamos que existen  $\mathfrak{Z} \xrightarrow{v} \mathfrak{X}$  y  $\mathfrak{Z} \xrightarrow{w} \mathfrak{X}$  dos  $\mathfrak{Y}$ -morfismos tal que  $v|_{\mathfrak{T}} = w|_{\mathfrak{T}} = u$  y veamos que  $v = w$ . Con las notaciones establecidas al principio de la demostración consideremos

$$v = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} (Z_n \xrightarrow{v'_n} \mathfrak{X}) \text{ y } w = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} (Z_n \xrightarrow{w'_n} \mathfrak{X}) \text{ de modo que el diagrama}$$

$$\begin{array}{ccc}
 T_n & \xrightarrow{j_n} & Z_n \\
 \searrow & & \downarrow \\
 & & \mathfrak{X} \\
 & & \downarrow \\
 & & \mathfrak{Y}
 \end{array}$$

es conmutativo. Por hipótesis se tiene que  $v'_n = w'_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  y, por lo tanto,  $v = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} v'_n = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} w'_n = w$ .  $\square$

2.2.3. Un morfismo  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  en  $\text{Sfn}$  es formalmente no ramificado (o formalmente étale) si, y sólo si para todo  $\mathfrak{Y}$ -esquema  $Z$  y para todo  $T \hookrightarrow Z$  subesquema cerrado dado por un Ideal  $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_Z$  de cuadrado nulo la aplicación inducida  $\text{Hom}_{\mathfrak{Y}}(Z, \mathfrak{X}) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathfrak{Y}}(T, \mathfrak{X})$  es inyectiva (o biyectiva, respectivamente) (véase la Definición 2.2.1).

COROLARIO 2.2.4. Sea  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  en  $\text{Sfn}$ . Si el morfismo  $f$  es formalmente no ramificado (o formalmente étale), entonces para todo  $\mathfrak{Y}$ -esquema formal noetheriano  $\mathfrak{Z}$  y para todo  $\mathfrak{T} \hookrightarrow \mathfrak{Z}$  subesquema formal cerrado dado por un Ideal  $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{Z}}$  de cuadrado nulo, la aplicación inducida

$$\text{Hom}_{\mathfrak{Y}}(\mathfrak{Z}, \mathfrak{X}) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathfrak{Y}}(\mathfrak{T}, \mathfrak{X}) \quad (2.2.4.10)$$

es inyectiva (o biyectiva, respectivamente).

DEMOSTRACIÓN. Dado  $(\mathfrak{V}_\alpha)$  un recubrimiento por abiertos formales afines de  $\mathfrak{Z}$ , sea  $(\mathfrak{U}_\alpha)$  el recubrimiento por abiertos formales afines de  $\mathfrak{X}$  dado por  $\mathfrak{U}_\alpha = \mathfrak{V}_\alpha \cap \mathfrak{X}$ , para todo  $\alpha$ . Por [EGA I, (10.14.4)]  $\mathfrak{U}_\alpha \hookrightarrow \mathfrak{V}_\alpha$  es un encaje cerrado en  $\text{Sfn}$  determinado por un Ideal de cuadrado nulo. Dado  $\mathfrak{X} \xrightarrow{u} \mathfrak{X}$  un  $\mathfrak{Y}$ -morfismo, llamemos  $u_\alpha = u|_{\mathfrak{U}_\alpha}$ , para cada  $\alpha$ . Si  $f$  es formalmente liso (formalmente no ramificado o formalmente étale) por la Proposición 2.2.2 para cada  $\alpha$  existe (a lo sumo existe o existe un único, respectivamente)  $\mathfrak{Y}$ -morfismo  $\mathfrak{V}_\alpha \xrightarrow{v_\alpha} \mathfrak{X}$  tal que  $v_\alpha|_{\mathfrak{U}_\alpha} = u_\alpha$ . En el caso formalmente no ramificado, por la unicidad recolectando los  $v_\alpha$  se obtiene que a lo sumo existe  $\mathfrak{Y}$ -morfismo  $\mathfrak{Z} \xrightarrow{v} \mathfrak{X}$  tal que  $v|_{\mathfrak{X}} = u$ . Y en el caso formalmente étale por la existencia y unicidad recolectando los  $v_\alpha$  se obtiene que existe un único  $\mathfrak{Y}$ -morfismo  $\mathfrak{Z} \xrightarrow{v} \mathfrak{X}$  tal que  $v|_{\mathfrak{X}} = u$ .  $\square$

2.2.5. Sea  $\text{Spf}(A) \xrightarrow{f} \text{Spf}(B)$  en  $\text{Sfn}_{\text{af}}$ . Aplicando la equivalencia de categorías (1.1.10.1), se tiene que  $f$  es formalmente liso (formalmente no ramificado o formalmente étale) si, y sólo si, la  $B$ -álgebra topológica  $A$  satisface la siguiente condición de levantamiento:

Para todo anillo (discreto)  $C$  y para todo homomorfismo continuo  $B \rightarrow C$ , dado  $I \subset C$  un ideal de cuadrado nulo la aplicación inducida

$$\text{Homcont}_B(A, C) \rightarrow \text{Homcont}_B(A, C/I) \quad (2.2.5.11)$$

es sobreyectiva (inyectiva o biyectiva, respectivamente).

Una  $B$ -álgebra topológica  $A$  que verifica la condición (2.2.5.11) se dice que es *formalmente lisa* (formalmente no ramificada o formalmente étale, respectivamente) (cf. [EGA IV<sub>1</sub>, (0.19.3.1) y (0.19.10.2)]).

Una referencia adecuada para el estudio de las propiedades fundamentales de las condiciones infinitesimales para anillos preádicos es la exposición hecha en [EGA IV<sub>1</sub>, §0.19.3 y §0.19.10]. Recordemos a continuación algunas de sus propiedades para facilitar al lector la comprensión de los primeros ejemplos de morfismos en  $\text{Sfn}_{\text{af}}$  que satisfacen las condiciones infinitesimales (Ejemplo 2.2.8).

PROPIEDAD 2.2.6. Sea  $B \rightarrow A$  un morfismo continuo de anillos preádicos y consideremos  $J \subset A, K \subset B$  ideales de definición con  $KA \subset J$ . Dados  $J' \subset A, K' \subset B$  ideales tal que  $K'A \subset J', J \subset J'$  y  $K \subset K'$ , si  $A$  es una  $B$ -álgebra formalmente lisa (formalmente no ramificada o formalmente étale) para las topologías  $J$  y  $K$ -ádicas entonces, se tiene que  $A$  es una  $B$ -álgebra formalmente lisa (formalmente no ramificada o formalmente étale, respectivamente) para las topologías  $J'$  y  $K'$ -ádicas, respectivamente.

LEMA 2.2.7. Sea  $B \rightarrow A$  un morfismo continuo de anillos preádicos,  $J \subset A, K \subset B$  ideales de definición con  $KA \subset J$  y denotemos por  $\widehat{A}, \widehat{B}$  las completaciones respectivas de  $A$  y  $B$ . Las siguientes condiciones son equivalentes:

- (1)  $A$  es una  $B$ -álgebra formalmente lisa (formalmente no ramificada o formalmente étale)
- (2)  $\widehat{A}$  es una  $B$ -álgebra formalmente lisa (formalmente no ramificada o formalmente étale, respectivamente)
- (3)  $\widehat{A}$  es una  $\widehat{B}$ -álgebra formalmente lisa (formalmente no ramificada o formalmente étale, respectivamente)

DEMOSTRACIÓN. Basta tener en cuenta que para todo anillo (discreto)  $C$  y para todo homomorfismo continuo  $B \rightarrow C$  se tienen las siguientes equivalencias:

$$\mathrm{Homcont}_B(A, C) \equiv \mathrm{Homcont}_B(\widehat{A}, C) \equiv \mathrm{Homcont}_{\widehat{B}}(\widehat{A}, C)$$

□

Como consecuencia de la Propiedad 2.2.6 y del Lema 2.2.7 se tienen los siguientes ejemplos:

EJEMPLO 2.2.8. Sea  $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$  con  $A$  un anillo  $J$ -ádico noetheriano y  $\mathbf{T} = T_1, T_2, \dots, T_r$  un número finito de variables.

- (1) Si consideramos en  $A$  la topología discreta, se sigue de la propiedad universal del anillo de polinomios que  $A[\mathbf{T}]$  es una  $A$ -álgebra formalmente lisa. Aplicando la Propiedad 2.2.6 y el Lema 2.2.7 se tiene que el anillo de series formales restringidas  $A\{\mathbf{T}\}$  es una  $A$ -álgebra formalmente lisa o, equivalentemente, el morfismo canónico  $\mathbb{A}_{\mathfrak{X}}^r \rightarrow \mathfrak{X}$  es formalmente liso.
- (2) Análogamente al ejemplo anterior, se obtiene que  $A[[\mathbf{T}]]$  es una  $A$ -álgebra formalmente lisa, de donde se deduce que la proyección  $\mathbb{D}_{\mathfrak{X}}^r \rightarrow \mathfrak{X}$  es formalmente lisa.
- (3) Si en  $A$  consideramos la topología discreta se sabe que, dado  $f \in A$ ,  $A_f$  es una  $A$ -álgebra formalmente étale. Entonces, resulta que la inclusión canónica  $\mathfrak{D}(f) \hookrightarrow \mathfrak{X}$  es formalmente étale.
- (4) Trivialmente todo morfismo sobreyectivo de anillos es formalmente no ramificado. Entonces, dado un ideal  $I \subset A$ , el encaje cerrado  $\mathrm{Spf}(A/I) \hookrightarrow \mathfrak{X}$  es formalmente no ramificado.
- (5) Si  $\mathfrak{X}' = \mathrm{Spf}(A/I)$  es un subesquema formal cerrado de  $\mathfrak{X}$ , en 1.4.10 se ha visto que el morfismo de completión de  $\mathfrak{X}$  a lo largo de  $\mathfrak{X}'$   $\mathfrak{X}_{/\mathfrak{X}'} \xrightarrow{\kappa} \mathfrak{X}$  se corresponde vía la equivalencia de categorías (1.1.10.1) con el morfismo continuo de anillos  $A \rightarrow \widehat{A}$ , donde  $\widehat{A}$  es el anillo completo de  $A$  para la topología  $(I + J)$ -ádica y, por lo tanto,  $\kappa$  es formalmente étale.

Para el estudio de las condiciones infinitesimales en  $\mathrm{Sch}$  se utilizan herramientas como el módulo de diferenciales, lo cual obliga a que dicho estudio se centre en la clase de los morfismos de tipo finito. Esto permite obtener caracterizaciones precisas de las condiciones infinitesimales bajo hipótesis

de finitud. De acuerdo con esto y, teniendo en mente que nuestro objetivo es caracterizar las condiciones infinitesimales en  $\mathbf{Sfn}$ , recordemos que se distinguen dos tipos de morfismos en  $\mathbf{Sfn}$  que generalizan a los morfismos de tipo finito en  $\mathbf{Sch}$ : los morfismos de pseudo tipo finito y los morfismos de tipo finito (Definición 1.3.1). De ahora en adelante, enfocaremos el estudio de las condiciones infinitesimales en estas clases de morfismos.

**DEFINICIÓN 2.2.9.** Sea  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  en  $\mathbf{Sfn}$ . El morfismo  $f$  es *liso* (no ramificado o étale) si, y sólo si, es de pseudo tipo finito y es formalmente liso (formalmente no ramificado o formalmente étale, respectivamente). Si además  $f$  es ádico, se dice que  $f$  es *liso ádico* (no ramificado ádico o étale ádico, respectivamente). Así, por la Definición 1.3.1 se verifica que  $f$  es liso ádico (no ramificado ádico o étale ádico) si es de tipo finito y formalmente liso (formalmente no ramificado o formalmente étale, respectivamente).

En particular, si  $X \xrightarrow{f} Y$  está en  $\mathbf{Sch}$ , ambas definiciones coinciden y coinciden con la dada en [EGA IV<sub>4</sub>, (17.3.1)] y, diremos que  $f$  es liso (no ramificado o étale, respectivamente).

**TERMINOLOGÍA.** A partir de ahora cuando hablemos de las condiciones infinitesimales para morfismos de pseudo tipo finito y morfismos de tipo finito nos referiremos a ellas como las *condiciones infinitesimales* y las *condiciones infinitesimales ádicas*, respectivamente.

**EJEMPLO 2.2.10.** Sea  $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$  con  $A$  un anillo  $J$ -ádico noetheriano y  $r \in \mathbb{N}$ . Aplicando el Ejemplo 2.2.8 se tiene que

- (1) El morfismo canónico  $\mathbb{A}_{\mathfrak{X}}^r \rightarrow \mathfrak{X}$  es liso ádico.
- (2) La proyección  $\mathbb{D}_{\mathfrak{X}}^r \rightarrow \mathfrak{X}$  es lisa.
- (3) La inclusión canónica  $\mathfrak{D}(f) \hookrightarrow \mathfrak{X}$  es étale ádica.
- (4) Dado un ideal  $I \subset A$ , el encaje cerrado  $\mathrm{Spf}(A/I) \hookrightarrow \mathfrak{X}$  es no ramificado ádico.
- (5) Si  $\mathfrak{X}' = \mathrm{Spf}(A/I)$  es un subesquema formal cerrado de  $\mathfrak{X}$ , se tiene que el morfismo de compleción  $\mathfrak{X}_{/\mathfrak{X}'} \xrightarrow{\kappa} \mathfrak{X}$  es étale.

Obsérvese que los ejemplos (2) y (5) no tienen análogo en  $\mathbf{Sch}$ . De modo que la estructura de los morfismos infinitesimales en  $\mathbf{Sfn}$  ha de ser diferente.

En los resultados que abarcan desde la Proposición 2.2.11 hasta el Corolario 2.2.20 se estudian las propiedades básicas de las condiciones infinitesimales de morfismos de esquemas formales localmente noetherianos. A pesar de que sus demostraciones son similares a las de los resultados análogos en  $\mathbf{Sch}$ , no se pueden deducir de estos, de ahí la necesidad de probarlas con detalle.

**PROPIEDADES 2.2.11.** En la categoría de esquemas formales localmente noetherianos  $\mathbf{Sfn}$  se verifican las siguientes propiedades:

- (1) La composición de morfismos lisos (no ramificados o étales) es un morfismo liso (no ramificado o étale, respectivamente).

- (2) El carácter liso, no ramificado y étale es estable para cambio de base en  $\mathbf{Sfn}$ .
- (3) El producto de morfismos lisos (no ramificados o étales) es un morfismo liso (no ramificado o étale, respectivamente).

DEMOSTRACIÓN. Por la Proposición 1.3.15 basta comprobar (1) y (2).

Para probar (1) consideremos  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  y  $\mathfrak{Y} \xrightarrow{g} \mathfrak{S}$  dos morfismos lisos y veamos que  $g \circ f$  es liso. Sea  $Z$  un  $\mathfrak{S}$ -esquema afín y  $T \hookrightarrow Z$  subesquema cerrado definido por un Ideal  $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_Z$  de cuadrado nulo. Dado  $T \xrightarrow{u} \mathfrak{X}$  un  $\mathfrak{S}$ -morfismo, como  $g$  es liso el morfismo  $f \circ u$  se levanta a un  $\mathfrak{S}$  morfismo  $Z \rightarrow \mathfrak{Y}$  de modo que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccc} T & \hookrightarrow & Z & & \\ \downarrow u & & \downarrow & \searrow & \\ \mathfrak{X} & \xrightarrow{f} & \mathfrak{Y} & \xrightarrow{g} & \mathfrak{S} \end{array}$$

Y como  $f$  es liso, existe un  $\mathfrak{Y}$ -morfismo  $Z \xrightarrow{v} \mathfrak{X}$  tal que  $v|_T = u$ , de donde se deduce que  $g \circ f$  satisface la condición de levantamiento (2.2.1.8) y, por lo tanto, es formalmente liso. Aplicando la Propiedad 1.3.4.(1) se deduce que  $g \circ f$  es liso. El caso no ramificado se demuestra con consideraciones análogas.

Veamos ahora que dado  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  un morfismo liso e  $\mathfrak{Y}' \rightarrow \mathfrak{Y}$  en  $\mathbf{Sfn}$ , el morfismo  $\mathfrak{X} \times_{\mathfrak{S}} \mathfrak{Y} \xrightarrow{f'} \mathfrak{Y}'$  es liso. Sea  $Z$  un  $\mathfrak{Y}'$ -esquema afín y  $T \hookrightarrow Z$  un subesquema cerrado dado por un Ideal  $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_Z$  de cuadrado nulo, sea  $T \xrightarrow{u} \mathfrak{X} \times_{\mathfrak{Y}} \mathfrak{Y}'$  un  $\mathfrak{Y}'$ -morfismo. Como  $f$  es liso, se tiene que el  $\mathfrak{Y}$ -morfismo  $T \xrightarrow{u} \mathfrak{X} \times_{\mathfrak{Y}} \mathfrak{Y}' \rightarrow \mathfrak{X}$  se levanta a un  $\mathfrak{Y}$ -morfismo  $Z \rightarrow \mathfrak{X}$  que hace el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} & & Z & & \\ & & \downarrow & \searrow & \\ & & T & \xrightarrow{u} & \mathfrak{X} \times_{\mathfrak{Y}} \mathfrak{Y}' \\ & & \downarrow & & \downarrow f' \\ & & \mathfrak{X} & \xrightarrow{f} & \mathfrak{Y} \end{array}$$

Por la propiedad universal de producto fibrado se tiene un  $\mathfrak{Y}'$ -morfismo  $Z \rightarrow \mathfrak{X} \times_{\mathfrak{Y}} \mathfrak{Y}'$  que coincide con  $u$  en  $T$ , con lo que  $f'$  es formalmente liso. Además aplicando la Propiedad 1.3.4.(3) resulta que  $f'$  es de pseudo tipo finito y, por lo tanto,  $f'$  es liso. De modo similar se prueba el caso no ramificado.  $\square$



PROPIEDADES 2.2.12. Las afirmaciones del resultado anterior se cumplen si en el enunciado cambiamos las condiciones infinitesimales por las correspondientes condiciones infinitesimales ádicas.

DEMOSTRACIÓN. Por la definición de las condiciones infinitesimales ádicas, basta aplicar el resultado anterior y los sorites de morfismos ádicos vistos en 1.2.6.  $\square$

EJEMPLO 2.2.13. Sea  $\mathfrak{X}$  en  $\text{Sfn}$  y  $r \in \mathbb{N}$ . Aplicando la Propiedad 2.2.11.(2), el Ejemplo 2.2.10.(1) y el Ejemplo 2.2.10.(2) se verifica que:

- (1) El morfismo de proyección  $\mathbb{A}_{\mathfrak{X}}^r = \mathfrak{X} \times_{\text{Spec}(\mathbb{Z})} \mathbb{A}_{\text{Spec}(\mathbb{Z})}^r \rightarrow \mathfrak{X}$  es un morfismo liso ádico.
- (2) El morfismo canónico  $\mathbb{D}_{\mathfrak{X}}^r = \mathfrak{X} \times_{\text{Spec}(\mathbb{Z})} \mathbb{D}_{\text{Spec}(\mathbb{Z})}^r \rightarrow \mathfrak{X}$  es liso.

PROPIEDADES 2.2.14. En la categoría de esquemas formales localmente noetherianos se verifica que:

- (1) Un encaje cerrado es no ramificado ádico.
- (2) Un encaje abierto es étale ádico.

DEMOSTRACIÓN. Los encajes cerrados y los encajes abiertos son monomorfismos y, por lo tanto, son morfismos no ramificados. Trivialmente se verifica que los encajes abiertos son morfismos lisos.  $\square$

PROPOSICIÓN 2.2.15. Sean  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$ ,  $\mathfrak{Y} \xrightarrow{g} \mathfrak{S}$  dos morfismos de pseudo tipo finito en  $\text{Sfn}$ . Entonces:

- (1) Si  $g \circ f$  es no ramificado, entonces  $f$  también.
- (2) Supongamos que  $g$  es no ramificado. Si  $g \circ f$  es liso (o étale) entonces,  $f$  es liso (o étale, respectivamente).

DEMOSTRACIÓN. El apartado (1) es inmediato. Para probar (2) consideremos  $Z$  un  $\mathfrak{Y}$ -esquema,  $T \hookrightarrow Z$  un  $\mathfrak{Y}$ -subesquema cerrado dado por un Ideal de cuadrado nulo y  $T \xrightarrow{u} \mathfrak{X}$  un  $\mathfrak{Y}$ -morfismo. Si  $g \circ f$  es liso existe un  $\mathfrak{S}$ -morfismo  $Z \xrightarrow{v} \mathfrak{X}$  tal que  $v|_T = u$  y, como  $g$  es no ramificado, se tiene que  $u$  es un  $\mathfrak{Y}$ -morfismo. Además, por el Corolario 1.3.17 se tiene que  $f$  es de pseudo tipo finito y, por lo tanto,  $f$  es liso. El caso étale se deduce del apartado (1) y del argumento anterior.  $\square$

COROLARIO 2.2.16. Sea  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  un morfismo de pseudo tipo finito y  $\mathfrak{Y} \xrightarrow{g} \mathfrak{S}$  un morfismo étale. El morfismo  $g \circ f$  es liso (o étale) si, y sólo si,  $f$  es liso (o étale, respectivamente).

DEMOSTRACIÓN. Es suficiente aplicar la Propiedad 2.2.11.(1) y la Proposición 2.2.15.  $\square$

2.2.17. (cf. [EGA IV<sub>4</sub>, (0.20.1.1)]) Sea  $B \rightarrow A$  un homomorfismo continuo de anillos preádicos,  $C$  una  $B$ -álgebra topológica e  $I \subset C$  un ideal de

cuadrado nulo. Dado  $A \xrightarrow{u} C/I$  un  $B$ -homomorfismo continuo de anillos se verifica que:

- (1) Si  $A \xrightarrow{v} C$ ,  $A \xrightarrow{w} C$  son dos  $B$ -homomorfismos continuos de anillos tal que módulo  $I$  coinciden con  $u$ , entonces se verifica que  $v - w \in \text{Dercont}_B(A, I)$ .
- (2) Fijado  $A \xrightarrow{v} C$  un  $B$ -homomorfismo continuo de anillos tal que coincide con  $u$  módulo  $I$  y dada  $d \in \text{Dercont}_B(A, I)$  se tiene que  $A \xrightarrow{v+d} C$  es un  $B$ -homomorfismo continuo de anillos tal que coincide con  $u$  módulo  $I$ .

2.2.18. Dado  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  un morfismo en  $\text{Sfn}$  de pseudo tipo finito, sea  $Z$  un  $\mathfrak{Y}$ -esquema afín,  $T \hookrightarrow Z$  un  $\mathfrak{Y}$ -subesquema cerrado dado por un Ideal  $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_Z$  de cuadrado nulo y  $T \xrightarrow{u} \mathfrak{X}$  un  $\mathfrak{Y}$ -morfismo. Observemos que  $\mathcal{I} = i^*\mathcal{I}$  tiene estructura de  $\mathcal{O}_T$ -Módulo. De 2.2.17 se deducen los dos resultados siguientes:

- (1) Si  $\mathfrak{Z} \xrightarrow{v} \mathfrak{X}$ ,  $\mathfrak{Z} \xrightarrow{w} \mathfrak{X}$  son dos  $\mathfrak{Y}$ -morfismos tales que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{i} & Z \\ & \searrow u & \downarrow v \parallel w \\ & & \mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y} \end{array}$$

es conmutativo, entonces el morfismo

$$\mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \xrightarrow{v^\# - w^\#} u_*\mathcal{I}$$

es una  $\mathfrak{Y}$ -derivación continua. El Lema 2.1.23 y el Teorema 2.1.22 implican que existe un único morfismo de  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -Módulos  $\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^1 \xrightarrow{\phi} u_*\mathcal{I}$  que hace el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}} & \xrightarrow{\widehat{d}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}} & \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^1 \\ \downarrow v^\# - w^\# & \swarrow \phi & \\ u_*\mathcal{I} & & \end{array}$$

conmutativo.

- (2) Fijado un levantamiento  $\mathfrak{Z} \xrightarrow{v} \mathfrak{X}$  de  $u$  y dado  $\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^1 \xrightarrow{\phi} u_*\mathcal{I}$  un morfismo de  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -Módulos, se verifica que  $w^\# := v^\# + \phi \circ \widehat{d}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}$  define otro  $\mathfrak{Y}$ -morfismo  $Z \xrightarrow{w} \mathfrak{X}$  tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{i} & Z \\ & \searrow u & \downarrow \text{---} w \\ & & \mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y} \end{array}$$

es conmutativo.

OBSERVACIÓN. A partir de ahora y hasta el final de este capítulo emplearemos el cálculo de Čech de la cohomología<sup>2</sup>. En consecuencia y, siempre que sea necesario impondremos la hipótesis de separación (cada vez que se utilice cohomología de grado mayor o igual que 2).

PROPOSICIÓN 2.2.19. *Sea  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  un morfismo en Sfn.*

- (1) *Dado  $(\mathfrak{U}_\alpha)_{\alpha \in I}$  un recubrimiento abierto de  $\mathfrak{X}$ ,  $f$  es liso (no ramificado o étale) si, y sólo si, para todo  $\alpha \in I$ ,  $\mathfrak{U}_\alpha \xrightarrow{f|_{\mathfrak{U}_\alpha}} \mathfrak{Y}$  es liso (no ramificado o étale, respectivamente).*
- (2) *Si  $(\mathfrak{V}_\lambda)_{\lambda \in J}$  es un recubrimiento abierto de  $\mathfrak{Y}$ ,  $f$  es liso (no ramificado o étale) si, y sólo si, para todo  $\lambda \in J$ ,  $f^{-1}(\mathfrak{V}_\lambda) \xrightarrow{f|_{f^{-1}(\mathfrak{V}_\lambda)}} \mathfrak{V}_\lambda$  es liso (no ramificado o étale, respectivamente).*

DEMOSTRACIÓN.

(1) Si  $f$  es liso (no ramificado o étale) por la Propiedad 2.2.14.(2) y la Propiedad 2.2.11.(1) se tiene que  $f_\alpha = f|_{\mathfrak{U}_\alpha}$  es liso (no ramificado o étale, respectivamente),  $\forall \alpha \in I$ .

Para probar el recíproco establezcamos las siguientes notaciones:  $Z$  es un  $\mathfrak{Y}$ -esquema afín,  $T \hookrightarrow Z$  es un  $\mathfrak{Y}$ -subesquema cerrado dado por un Ideal  $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_Z$  de cuadrado nulo y  $T \xrightarrow{u} \mathfrak{X}$  es un  $\mathfrak{Y}$ -morfismo. Se tiene que la colección  $(u^{-1}(\mathfrak{U}_\alpha))_{\alpha \in I}$  es un recubrimiento abierto de  $T$  y, si denotamos por  $(W_\alpha)_{\alpha \in I}$  el recubrimiento abierto correspondiente en  $Z$ , resulta que  $u^{-1}(\mathfrak{U}_\alpha) \hookrightarrow W_\alpha$  es un subesquema cerrado definido por el Ideal de cuadrado nulo  $\mathcal{I}_\alpha := \mathcal{I}|_{W_\alpha} \subset \mathcal{O}_{W_\alpha}$ ,  $\forall \alpha \in I$ . Nótese que  $\mathcal{I}_\alpha$  tiene estructura de  $\mathcal{O}_{u^{-1}(\mathfrak{U}_\alpha)}$ -Módulo.

Supongamos que  $f_\alpha$  es no ramificado,  $\forall \alpha$  y sean  $v, w : Z \rightarrow \mathfrak{X}$  dos  $\mathfrak{Y}$ -morfismos tal que  $v|_T = w|_T$ . Entonces  $v|_{u^{-1}(\mathfrak{U}_\alpha)} = w|_{u^{-1}(\mathfrak{U}_\alpha)}$  y, aplicando 2.2.3 se tiene que  $v|_{W_\alpha} = w|_{W_\alpha}$ ,  $\forall \alpha$ , es decir,  $v = w$  y, por lo tanto,  $f$  es no ramificado.

Veamos el caso liso. Para cada  $\alpha$  recubramos  $u^{-1}(\mathfrak{U}_\alpha)$  por abiertos afines de  $T$ ,  $T_{\alpha_i}$ , y consideremos  $Z_{\alpha_i}$  los abiertos correspondientes en  $Z$ . Entonces, simplificando la notación y admitiendo repeticiones en el recubrimiento de  $\mathfrak{X}$ , podemos suponer que los recubrimientos de  $T$  y de  $Z$  son afines y que están indicados por el conjunto de índices  $I$ . Como los morfismos  $f_\alpha$  son lisos, para cada  $\alpha$ , existe un  $\mathfrak{Y}$ -morfismo  $Z_\alpha \xrightarrow{v'_\alpha} \mathfrak{U}_\alpha$  tal que el siguiente

<sup>2</sup>Dado  $X$  un espacio topológico,  $\mathfrak{U}$  un recubrimiento abierto de  $X$  y  $\mathcal{F}$  un haz de grupos abelianos sobre  $X$ , el grupo  $p$ -ésimo de cohomología de Čech de  $\mathcal{F}$  respecto al recubrimiento  $\mathfrak{U}$  es

$$\check{H}^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) := H^p(\check{C}(\mathfrak{U}, \mathcal{F})) = \frac{\check{Z}^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F})}{\check{B}^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F})}$$

donde  $\check{C}(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$  es el complejo de Čech de  $\mathcal{F}$  (véase, por ejemplo, [H1, Chapter III, p. 219- 220]).

diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 T_\alpha & \hookrightarrow & Z_\alpha \\
 \downarrow u_\alpha := u|_{T_\alpha} & \swarrow v'_\alpha & \downarrow \\
 \mathfrak{U}_\alpha & \xrightarrow{f_\alpha} & \mathfrak{Y}
 \end{array}$$

Para cada  $\alpha$ , denotemos por  $v_\alpha$  el  $\mathfrak{Y}$ -morfismo  $Z_\alpha \xrightarrow{v'_\alpha} \mathfrak{U}_\alpha \hookrightarrow \mathfrak{X}$ . A partir de  $(v_\alpha)$  vamos a construir una colección de  $\mathfrak{Y}$ -morfismos  $(Z_\alpha \xrightarrow{w_\alpha} \mathfrak{X})$  que recolectan y que coinciden en  $T_\alpha$  con  $u_\alpha$ , para cada  $\alpha \in I$ .

Para ello, establecemos la notación

$$\mathfrak{U}_{\alpha\beta} := \mathfrak{U}_\alpha \cap \mathfrak{U}_\beta, Z_{\alpha\beta} := Z_\alpha \cap Z_\beta, T_{\alpha\beta} := T_\alpha \cap T_\beta, u_{\alpha\beta} := u|_{T_{\alpha\beta}}$$

para cada par de índices  $\alpha, \beta$  tales que  $Z_{\alpha\beta} \neq \emptyset$ . Observemos que  $T_{\alpha\beta} \xrightarrow{i_{\alpha\beta}} Z_{\alpha\beta}$  es un encaje cerrado de esquemas afines dado por un Ideal  $\mathcal{I}_{\alpha\beta} \subset \mathcal{O}_{T_{\alpha\beta}}$  de cuadrado nulo y que, por lo tanto,  $\mathcal{I}_{\alpha\beta} = i_{\alpha\beta}^*(\mathcal{I}_{\alpha\beta})$ . Fijados  $\alpha, \beta$  tales que  $T_{\alpha\beta} \neq \emptyset$ , como  $v_\alpha$  y  $v_\beta$  coinciden en  $T_{\alpha\beta}$  por 2.2.18.(1) se verifica que existe un único morfismo de  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -Módulos  $\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^1 \xrightarrow{\phi_{\alpha\beta}} (u_{\alpha\beta})_*(\mathcal{I}_{\alpha\beta})$  tal que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{O}_{\mathfrak{X}} & \xrightarrow{\widehat{d}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}} & \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^1 \\
 \downarrow (v_\alpha|_{Z_{\alpha\beta}})^\# - (v_\beta|_{Z_{\alpha\beta}})^\# & \swarrow \phi_{\alpha\beta} & \\
 (u_{\alpha\beta})_*(\mathcal{I}_{\alpha\beta}) & & 
 \end{array}$$

Consideremos  $u_{\alpha\beta}^*(\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^1) \rightarrow \mathcal{I}_{\alpha\beta}$  el morfismo de  $\mathcal{O}_{T_{\alpha\beta}}$ -Módulos adjunto de  $\phi_{\alpha\beta}$ , que continuaremos denotando por  $\phi_{\alpha\beta}$  cometiendo un pequeño abuso de notación. La familia de morfismos  $(\phi_{\alpha\beta})$  verifica la condición de cociclo; es decir, para cualesquiera  $\alpha, \beta, \gamma$  tales que  $Z_{\alpha\beta\gamma} := Z_\alpha \cap Z_\beta \cap Z_\gamma \neq \emptyset$ , se tiene que

$$\phi_{\alpha\beta}|_{T_{\alpha\beta\gamma}} - \phi_{\alpha\gamma}|_{T_{\alpha\beta\gamma}} + \phi_{\beta\gamma}|_{T_{\alpha\beta\gamma}} = 0 \quad (2.2.19.12)$$

donde  $T_{\alpha\beta\gamma} := T_\alpha \cap T_\beta \cap T_\gamma$ . Por lo tanto, define un elemento

$$[(\phi_{\alpha\beta})] \in \check{H}^1(T, \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_T}(u^*\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^1, \mathcal{I})) = [\mathbf{T}, (5.4.15)]$$

$$H^1(T, \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_T}(u^*\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^1, \mathcal{I}))$$

Pero como  $T$  es un esquema afín resulta que  $H^1(T, \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_T}(u^*\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^1, \mathcal{I})) = 0$  y, por lo tanto, existe  $(\phi_\alpha) \in \check{C}^0(T, \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_T}(u^*\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^1, \mathcal{I}))$  tal que, para cada par de índices  $\alpha, \beta$  con  $Z_{\alpha\beta} \neq \emptyset$ ,

$$\phi_\alpha|_{T_{\alpha\beta}} - \phi_\beta|_{T_{\alpha\beta}} = \phi_{\alpha\beta} \quad (2.2.19.13)$$

Cometeremos de nuevo un abuso de notación y utilizaremos indistintamente  $\phi_\alpha$  para  $\phi_\alpha$  y su adjunto. Para cada  $\alpha$ , sea  $Z_\alpha \xrightarrow{w_\alpha} \mathfrak{X}$  el morfismo que coincide

con  $v_\alpha$  como aplicación de espacios topológicos y dado como morfismo de espacios topológicamente anillados por  $w_\alpha^\# := v_\alpha^\# - \phi_\alpha \circ \widehat{d}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}$ . Entonces, por 4.1.1.(2) se tiene que  $w_\alpha$  es un levantamiento de  $u_\alpha$  sobre  $\mathfrak{Y}$  para todo  $\alpha \in I$  y, de los datos (2.2.19.13) y (2.2.19.12) se deduce que los morfismos  $w_\alpha$  recolectan en un morfismo  $Z \xrightarrow{w} \mathfrak{X}$  que coincide con  $u$  en  $T$  y, por lo tanto,  $f$  es formalmente liso. Además, como ser de pseudo tipo finito es una condición local se tiene que  $f$  es de pseudo tipo finito, con lo cual,  $f$  es liso.

(2) Para cada  $\lambda$  llamemos  $f_\lambda = f|_{f^{-1}(\mathfrak{Y}_\lambda)}$  y consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(\mathfrak{Y}_\lambda) & \xrightarrow{i_\lambda} & \mathfrak{X} \\ f_\lambda \downarrow & & \downarrow f \\ \mathfrak{Y}_\lambda & \xrightarrow{j_\lambda} & \mathfrak{Y} \end{array}$$

donde las flechas horizontales son encajes abiertos. Si  $f$  es liso (no ramificado o étale) por la Propiedad 2.2.11.(1) y por la Propiedad 2.2.14.(2) se tiene que  $f \circ i_\lambda = j_\lambda \circ f_\lambda$  es liso (no ramificado o étale) y, como  $j_\lambda$  es étale ádico, aplicando el Corolario 2.2.16 se tiene que  $f_\lambda$  es liso (no ramificado o étale, respectivamente). Recíprocamente, supongamos que los morfismos  $f_\lambda$  son lisos (no ramificados o étales). Los encajes abiertos  $j_\lambda$  son étales y por la Propiedad 2.2.11.(1) resulta que los morfismos  $j_\lambda \circ f_\lambda$  son lisos (no ramificados o étales). Entonces por el apartado (1) se verifica que  $f$  es liso (no ramificado o étale, respectivamente)  $\square$

**COROLARIO 2.2.20.** *Los resultados 2.2.15, 2.2.16 y 2.2.19 se verifican si cambiamos las condiciones infinitesimales pseudo por las condiciones infinitesimales ádicas.*

**DEMOSTRACIÓN.** El resultado se deduce de 1.2.6, de la Proposición 2.2.15, del Corolario 2.2.16 y de la Proposición 2.2.19.  $\square$

**OBSERVACIÓN.** Como consecuencia de los dos últimos resultados se tiene que el estudio de las condiciones infinitesimales (ádicas o no) en  $\mathbf{Sfn}$ , se puede restringir siempre al estudio de las correspondientes condiciones infinitesimales en  $\mathbf{Sfn}_{\text{af}}$ .

**COROLARIO 2.2.21.** *Sea  $\mathfrak{X}$  en  $\mathbf{Sfn}$  y  $\mathfrak{X}' \subset \mathfrak{X}$  un subesquema formal cerrado. Entonces el morfismo de completación de  $\mathfrak{X}$  a lo largo de  $\mathfrak{X}'$ ,  $\mathfrak{X}/\mathfrak{X}' \xrightarrow{\kappa} \mathfrak{X}$  es étale.*

**DEMOSTRACIÓN.** Aplicando la Proposición 2.2.19 podemos suponer que  $\mathfrak{X} = \text{Spf}(A)$  y  $\mathfrak{X}' = \text{Spf}(A/I)$  están en  $\mathbf{Sfn}_{\text{af}}$  con  $A$  un anillo  $J$ -ádico noetheriano e  $I \subset A$  un ideal. Entonces, por el Ejemplo 2.2.10.(5) si  $\widehat{A}$  es el anillo completo de  $A$  para la topología  $(I + J)$ -ádica, se tiene que  $\mathfrak{X}/\mathfrak{X}' = \text{Spf}(\widehat{A}) \xrightarrow{\kappa} \mathfrak{X} = \text{Spf}(A)$  es étale.  $\square$

PROPOSICIÓN 2.2.22. Dado  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  en  $\text{Sfn}$ , consideremos  $\mathfrak{X}' \subset \mathfrak{X}$  e  $\mathfrak{Y}' \subset \mathfrak{Y}$  subesquemas formales cerrados tales que  $f(\mathfrak{X}') \subset \mathfrak{Y}'$ .

- (1) Si  $f$  es liso (no ramificado o étale) entonces  $\mathfrak{X}/\mathfrak{X}' \xrightarrow{\widehat{f}} \mathfrak{Y}/\mathfrak{Y}'$  es liso (no ramificado o étale, respectivamente).
- (2) Si además  $\mathfrak{X}' = f^{-1}(\mathfrak{Y}')$  y  $f$  es liso ádico (no ramificado ádico o étale ádico) se tiene que  $\mathfrak{X}/\mathfrak{X}' \xrightarrow{\widehat{f}} \mathfrak{Y}/\mathfrak{Y}'$  es liso ádico (no ramificado ádico o étale ádico, respectivamente).

DEMOSTRACIÓN. Por el diagrama (1.4.12.5) se tiene el siguiente diagrama conmutativo en  $\text{Sfn}$

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{X} & \xrightarrow{f} & \mathfrak{Y} \\ \kappa \uparrow & & \uparrow \kappa \\ \mathfrak{X}/\mathfrak{X}' & \xrightarrow{\widehat{f}} & \mathfrak{Y}/\mathfrak{Y}' \end{array}$$

donde las flechas verticales son morfismos de completación que, con un abuso de notación denotaremos ambos por  $\kappa$ . Probemos el apartado (1). Si  $f$  es liso (no ramificado o étale) por el corolario anterior y la Propiedad 2.2.11.(1) se tiene que  $f \circ \kappa = \kappa \circ \widehat{f}$  también es liso (no ramificado o étale). Como  $\kappa$  es étale de la Proposición 2.2.15 se deduce que  $\widehat{f}$  es liso (no ramificado o étale, respectivamente). El apartado (2) es consecuencia de (1) y de la Proposición 1.4.15.  $\square$

COROLARIO 2.2.23. Dado  $X \xrightarrow{f} Y$  un morfismo de esquemas localmente noetherianos, consideremos  $X' \subset X$  e  $Y' \subset Y$  subesquemas cerrados tales que  $f(X') \subset Y'$ . Si  $f$  es liso (no ramificado, étale), entonces  $X/X' \xrightarrow{\widehat{f}} Y/Y'$  es liso (no ramificado, étale, respectivamente). Y si  $X' = f^{-1}(Y')$  se tiene que además  $\widehat{f}$  es ádico.

DEFINICIÓN 2.2.24. Sea  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  en  $\text{Sfn}$ . Se dice que  $f$  es liso (no ramificado o étale) en  $x \in \mathfrak{X}$  si existe  $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{X}$  abierto tal que  $f|_{\mathfrak{U}}$  es liso (no ramificado o étale, respectivamente).

Así, por la Proposición 2.2.19 se tiene que  $f$  es liso (no ramificado o étale) si, y sólo si,  $f$  es liso (no ramificado o étale, respectivamente) en  $x \in \mathfrak{X}$ ,  $\forall x \in \mathfrak{X}$ .

Observemos que el conjunto de puntos  $x \in \mathfrak{X}$  tal que  $f$  es liso (no ramificado, o étale) en  $x$  es un abierto de  $\mathfrak{X}$ .

### 2.3. El Módulo de diferenciales y las condiciones infinitesimales

En esta parte se estudian las primeras caracterizaciones para un morfismo  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  liso, no ramificado y étale. Sobre todo, nos centraremos en las propiedades relacionadas con Módulo de diferenciales  $\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^1$ . Resaltamos

la importancia del Criterio jacobiano para esquemas formales (Corolario 2.3.12) en el que, traduciendo el Criterio jacobiano de Zariski para anillos topológicos (cf. [EGA IV<sub>1</sub>, (0.22.6.1)]), se determina cuándo un subesquema formal cerrado de un esquema formal liso es liso.

LEMA 2.3.1. [EGA IV<sub>1</sub>, (0.20.7.4)] *Sea  $B \rightarrow A$  un homomorfismo continuo de anillos preádicos. Se verifica que  $A$  es una  $B$ -álgebra formalmente no ramificada si, y sólo si,  $\widehat{\Omega}_{A/B}^1 = 0$ .*

DEMOSTRACIÓN. Sea  $A$  una  $B$ -álgebra formalmente no ramificada y  $J \subset A$  un ideal de definición. Es suficiente probar que, para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\text{Homcont}_A(\widehat{\Omega}_{A/B}^1, \Omega_{A/B}^1/J^{n+1}\Omega_{A/B}^1) = 0$ . Por hipótesis, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , el epimorfismo de  $B$ -álgebras topológicas discretas<sup>3</sup>

$$\frac{A}{J^{n+1}} \times \frac{\Omega_{A/B}^1}{J^{n+1}\Omega_{A/B}^1} \rightarrow \frac{A}{J^{n+1}}$$

es continuo y su núcleo  $I := (0, \Omega_{A/B}^1/J^{n+1}\Omega_{A/B}^1) \subset C$  es de cuadrado nulo, por tanto, aplicando 2.2.17.(2) se tiene que

$$0 = \text{Dercont}_B\left(A, \frac{\Omega_{A/B}^1}{J^{n+1}\Omega_{A/B}^1}\right) \stackrel{(2.1.5.1)}{\cong} \text{Homcont}_A\left(\widehat{\Omega}_{A/B}^1, \frac{\Omega_{A/B}^1}{J^{n+1}\Omega_{A/B}^1}\right)$$

Recíprocamente, sea  $C$  una  $B$ -álgebra topológica discreta,  $I \subset C$  un ideal de cuadrado nulo,  $A \xrightarrow{u} C/I$  un  $B$ -homomorfismo continuo y suponemos que existen dos homomorfismos continuos de álgebras topológicas  $A \xrightarrow{v} C$ ,  $A \xrightarrow{w} C$  tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} B & \longrightarrow & A \\ & \searrow & \parallel \\ & & C \\ & & \parallel \\ & & I \end{array} \quad \begin{array}{c} \swarrow u \\ \downarrow v \\ \downarrow w \end{array}$$

Por 2.1.5 se verifica que  $\text{Dercont}_B(A, I) \cong \text{Homcont}_A(\widehat{\Omega}_{A/B}^1, I) = 0$  y, aplicando 2.2.17.(1) resulta que  $u = v$  y, por lo tanto,  $A$  es una  $B$ -álgebra formalmente no ramificada.  $\square$

PROPOSICIÓN 2.3.2. *Sea  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  un morfismo en Sfn de pseudo tipo finito. El morfismo  $f$  es no ramificado si, y sólo si,  $\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^1 = 0$ .*

<sup>3</sup>Sea  $A$  un anillo y  $M$  un  $A$ -módulo. Consideremos el grupo aditivo  $A \oplus M$  y en él la multiplicación

$$(a, m) \cdot (a', m') = (aa', am' + a'm)$$

donde  $a, a' \in A; m, m' \in M$ . Esta operación es bilineal, asociativa y con uno. El anillo construido de esta forma se llama *producto semidirecto de  $A$  y  $M$*  y se denota  $A \ltimes M$ . Si  $A$  es un anillo preádico y consideramos en  $A \ltimes M$  la topología inducida por la de  $A$ , se tiene que los homomorfismos de anillos  $A \rightarrow A \ltimes M$  y  $A \ltimes M \rightarrow A$  son continuos.

DEMOSTRACIÓN. Por la Proposición 2.2.19 podemos suponer que  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  está en  $\mathbf{Sfn}_{\text{af}}$  y, entonces el resultado es consecuencia del Lema 2.3.1.  $\square$

COROLARIO 2.3.3. Sean  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  y  $\mathfrak{Y} \xrightarrow{g} \mathfrak{S}$  dos morfismos de pseudo tipo finito. Entonces  $f$  es no ramificado si, y sólo si, el morfismo de  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -Módulos  $f^*(\widehat{\Omega}_{\mathfrak{Y}/\mathfrak{S}}^1) \rightarrow \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{S}}^1$  es sobreyectivo.

DEMOSTRACIÓN. Basta tener en cuenta la proposición anterior y la Primera sucesión exacta fundamental (2.1.27.5) asociada a los morfismos  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y} \xrightarrow{g} \mathfrak{S}$ .  $\square$

LEMA 2.3.4. Sea  $B \xrightarrow{f} A$  un morfismo continuo de anillos preádicos. Si  $A$  es una  $B$ -álgebra formalmente lisa, se verifica que:

- (1)  $A$  es una  $B$ -álgebra plana.
- (2) Para todo  $J \subset A$  ideal de definición,  $\widehat{\Omega}_{A/B}^1 \otimes_A A/J$  es un  $A/J$ -módulo proyectivo. Si además,  $\widehat{\Omega}_{A/B}^1$  es un  $A$ -módulo de tipo finito (por ejemplo, si  $\text{Spf}(A) \rightarrow \text{Spf}(B)$  es un morfismo de pseudo tipo finito en  $\mathbf{Sfn}_{\text{af}}$ ), entonces  $\widehat{\Omega}_{A/B}^1$  es un  $A$ -módulo proyectivo.

DEMOSTRACIÓN.

(1) Basta ver que para todo ideal primo  $\mathfrak{p} \subset A$ ,  $A_{\mathfrak{p}}$  es un  $B_{\mathfrak{q}}$ -módulo plano con  $\mathfrak{q} = f^{-1}(\mathfrak{p})$ . Fijemos pues,  $\mathfrak{p} \subset A$  un ideal primo. Por [EGA IV<sub>1</sub>, (0.19.3.5.(iv))] se verifica que  $A_{\mathfrak{p}}$  es una  $B_{\mathfrak{q}}$ -álgebra formalmente lisa para las topologías ádicas y, aplicando la Propiedad 2.2.6 resulta que  $A_{\mathfrak{p}}$  es una  $B_{\mathfrak{q}}$ -álgebra formalmente lisa para las topologías dadas por los ideales maximales. Entonces, por [EGA IV<sub>1</sub>, (0.19.7.1)] se tiene que  $A_{\mathfrak{p}}$  es un  $B_{\mathfrak{q}}$ -módulo plano.

(2) (cf. [Ma, Theorem 28.5]) Veamos que dado  $M \xrightarrow{\varphi} N \rightarrow 0$  un homomorfismo sobreyectivo de  $A/J$ -módulos, entonces la aplicación

$$\text{Hom}_{\frac{A}{J}}(\widehat{\Omega}_{A/B}^1 \otimes_A \frac{A}{J}, M) \rightarrow \text{Hom}_{\frac{A}{J}}(\widehat{\Omega}_{A/B}^1 \otimes_A \frac{A}{J}, N)$$

es sobreyectiva, es decir,  $\text{Hom}_A(\widehat{\Omega}_{A/B}^1, M) \rightarrow \text{Hom}_A(\widehat{\Omega}_{A/B}^1, N)$  es sobreyectiva. Por 2.1.5 es suficiente probar que la aplicación inducida por  $\varphi$

$$\text{Der}_B(A, M) \rightarrow \text{Der}_B(A, N) \quad (2.3.4.14)$$

es sobreyectiva. Consideremos la  $B$ -álgebra discreta  $C := A/J \rtimes M$  e  $I = (0, \text{Ker } \varphi) \subset C$ . Dada  $d \in \text{Der}_B(A, N)$  define un homomorfismo continuo de  $B$ -álgebras topológicas

$$\begin{aligned} A &\longrightarrow \frac{C}{I} = \frac{A}{J} \rtimes N \\ a &\rightsquigarrow (a + J, d(a)) \end{aligned}$$

y, como  $I^2 = 0$  y  $A$  es una  $B$ -álgebra formalmente lisa, existe un homomorfismo continuo de  $B$ -álgebras topológicas  $A \xrightarrow{u} C$  tal que el siguiente



diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 B & \longrightarrow & A \\
 \downarrow & \searrow u & \downarrow \\
 \frac{A}{J} \times M = C & \xrightarrow{(1, \varphi)} & \frac{C}{I} = \frac{A}{J} \times N
 \end{array}$$

La segunda componente del morfismo  $u$  define una  $B$ -derivación continua  $A \xrightarrow{d'} M$  tal que  $\varphi \circ d' = d$  y, por lo tanto, la aplicación (2.3.4.14) es sobreyectiva, con lo cual,  $\widehat{\Omega}_{A/B}^1 \otimes_A A/J$  es un  $A/J$ -módulo proyectivo.

Entonces, si  $\widehat{\Omega}_{A/B}^1$  es un  $A$ -módulo de tipo finito como consecuencia de [EGA I, (0.7.2.10)] se tiene que es un  $A$ -módulo proyectivo como se quería.  $\square$

PROPOSICIÓN 2.3.5. *Sea  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  un morfismo liso. Entonces  $f$  es plano y  $\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^1$  un  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -Módulo localmente libre de rango finito.*

DEMOSTRACIÓN. Como es una cuestión local, el resultado es consecuencia del lema anterior y de [EGA I, (10.10.8.6)].  $\square$

2.3.6. Dado  $A$  un anillo  $J$ -preádico, sea  $\widehat{A}$  la completación de  $A$  para la topología  $J$ -ádica y  $A_n = A/J^{n+1}$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Consideremos  $M''$ ,  $M'$  y  $M$   $A$ -módulos y denotemos por  $\widehat{M}''$ ,  $\widehat{M}'$ ,  $\widehat{M}$  los  $\widehat{A}$ -módulos completos para la topología  $J$ -ádica y sea  $\widehat{M}'' \xrightarrow{u} \widehat{M}' \xrightarrow{v} \widehat{M}$  una sucesión de  $\widehat{A}$ -módulos. Se verifica que:

- (1) Si  $0 \rightarrow \widehat{M}'' \xrightarrow{u} \widehat{M}' \xrightarrow{v} \widehat{M} \rightarrow 0$  es una sucesión exacta corta escindida de  $\widehat{A}$ -módulos entonces, para todo  $n \in \mathbb{N}$

$$0 \rightarrow M'' \otimes_A A_n \xrightarrow{u_n} M' \otimes_A A_n \xrightarrow{v_n} M \otimes_A A_n \rightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta escindida.

- (2) Recíprocamente, si  $M \otimes_A A_n$  un  $A_n$ -módulo proyectivo y  $0 \rightarrow M'' \otimes_A A_n \xrightarrow{u_n} M' \otimes_A A_n \xrightarrow{v_n} M \otimes_A A_n \rightarrow 0$  es una sucesión exacta corta de  $A_n$ -módulos, para todo  $n \in \mathbb{N}$ , entonces

$$0 \rightarrow \widehat{M}'' \rightarrow \widehat{M}' \rightarrow \widehat{M} \rightarrow 0 \tag{2.3.6.15}$$

es una sucesión exacta corta escindida.

En efecto, el apartado (1) es inmediato. Para probar el apartado (2) consideremos para cada  $n \in \mathbb{N}$  se tienen los siguientes diagramas conmutativos:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & M'' \otimes_A A_{n+1} & \xrightarrow{u_{n+1}} & M' \otimes_A A_{n+1} & \xrightarrow{v_{n+1}} & M \otimes_A A_{n+1} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow f_n & & \downarrow g_n & & \downarrow h_n \\
 0 & \longrightarrow & M'' \otimes_A A_n & \xrightarrow{u_n} & M' \otimes_A A_n & \xrightarrow{v_n} & M \otimes_A A_n \longrightarrow 0
 \end{array}$$

donde las filas son sucesiones exactas cortas y escindidas. Por paso al límite inverso se tiene que la sucesión (2.3.6.15) es exacta. Veamos que es escindida. Por hipótesis, para cada  $n \in \mathbb{N}$  existe  $M \otimes_A A_n \xrightarrow{t_n} M' \otimes_A A_n$  tal que  $v_n \circ t_n = 1$ . A partir de  $(t_n)$  vamos a definir una familia de morfismos  $(M \otimes_A A_n \xrightarrow{t'_n} M' \otimes_A A_n)$  verificando que

$$v_n \circ t'_n = 1 \quad g_n \circ t'_{n+1} = t'_n \circ h_n \quad (2.3.6.16)$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Para  $k = 0$  tomamos  $t'_0 := t_0$ . Supongamos construidos  $t'_k$  verificando (2.3.6.16) para todo  $k \leq n$  y definamos  $t'_{n+1}$ . Si  $w_n := g_n \circ t_{n+1} - t'_n \circ h_n$  se verifica que  $v_n \circ w_n = 0$  y, por lo tanto,  $\text{Im } w_n \subset \text{Ker } v_n = \text{Im } u_n$ . Por otra parte, como  $M \otimes_A A_{n+1}$  es un  $A_{n+1}$ -módulo proyectivo, existe  $M \otimes_A A_{n+1} \xrightarrow{\theta_{n+1}} u_{n+1}(M'' \otimes_A A_{n+1})$  tal que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} & & u_{n+1}(M'' \otimes_A A_{n+1}) \\ & \nearrow \theta_{n+1} & \downarrow \\ M \otimes_A A_{n+1} & \xrightarrow{w_n} & u_n(M'' \otimes_A A_n) \end{array}$$

Si definimos  $t'_{n+1} := t_{n+1} - \theta_{n+1}$ , se verifica que  $v_{n+1} \circ t'_{n+1} = 1$  y  $g_n \circ t'_{n+1} = t'_n \circ h_n$ . El morfismo  $t' := \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} t'_n$  verifica que  $v \circ t' = 1$  y la sucesión

(2.3.6.15) es escindida.

**PROPOSICIÓN 2.3.7.** *Sea  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  un morfismo liso en Sfn. Para todo morfismo  $\mathfrak{Y} \rightarrow \mathfrak{S}$  de pseudo tipo finito en Sfn la sucesión de  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -Módulos coherentes*

$$0 \rightarrow f^* \widehat{\Omega}_{\mathfrak{Y}/\mathfrak{S}}^1 \xrightarrow{\Phi} \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{S}}^1 \xrightarrow{\Psi} \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^1 \rightarrow 0$$

es exacta y localmente escindida.

**DEMOSTRACIÓN.** Como es una cuestión local podemos suponer que  $\mathfrak{X} = \text{Spf}(A) \xrightarrow{f} \mathfrak{Y} = \text{Spf}(B)$  y  $\mathfrak{Y} = \text{Spf}(B) \xrightarrow{g} \mathfrak{S} = \text{Spf}(C)$  están en  $\text{Sfn}_{\text{af}}$  con  $A$  una  $B$ -álgebra formalmente lisa. Dado  $J \subset A$  un ideal de definición si escribimos  $A_n = A/J^{n+1}$ , por el Lema 2.3.4 se tiene que  $\widehat{\Omega}_{A/B}^1 \otimes_A A_n$  es un  $A_n$ -módulo proyectivo, para cada  $n \in \mathbb{N}$  y entonces, por 2.3.6.(2) basta ver que para todo  $n \in \mathbb{N}$

$$0 \rightarrow \Omega_{B/C}^1 \otimes_B A_n \xrightarrow{\Phi_n} \Omega_{A/C}^1 \otimes_A A_n \xrightarrow{\Psi_n} \Omega_{A/B}^1 \otimes_A A_n \rightarrow 0$$

es una sucesión exacta escindida. Por la Primera sucesión exacta fundamental de anillos asociada a  $C \xrightarrow{g} B \xrightarrow{f} A$  es suficiente probar que para todo  $n \in \mathbb{N}$  la aplicación  $\Phi_n$  es una sección o, equivalentemente, que para todo  $A_n$ -módulo  $M$  la aplicación inducida

$$\text{Hom}_{A_n}(\Omega_{A/C}^1 \otimes_A A_n, M) \rightarrow \text{Hom}_{A_n}(\Omega_{B/C}^1 \otimes_B A_n, M)$$

es sobreyectiva. Aplicando (2.1.5.2) este hecho es equivalente a demostrar que la aplicación

$$\mathrm{Der}_C(A, M) \rightarrow \mathrm{Der}_C(B, M) \quad (2.3.7.17)$$

es sobreyectiva. Sea  $n \in \mathbb{N}$  y  $M$  un  $A_n$ -módulo. Dada  $d \in \mathrm{Der}_C(B, M)$  define un homomorfismo continuo de álgebras topológicas

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\lambda} & A_n \times M \\ b & \rightsquigarrow & (f(b) + J^{n+1}, d(b)) \end{array}$$

Como  $M^2 = 0$  y  $A$  es una  $B$ -álgebra formalmente lisa, existe un homomorfismo continuo de  $B$ -álgebras topológicas  $A \xrightarrow{v} A_n \times M$  tal que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{g} & A \\ \lambda \downarrow & \swarrow v & \downarrow \\ A_n \times M & \longrightarrow & A_n \end{array}$$

La segunda componente del morfismo  $v$  define una  $C$ -derivación  $A \xrightarrow{d'} M$  tal que  $d' \circ g = d$  y, por lo tanto, la aplicación (2.3.7.17) es sobreyectiva.  $\square$

**COROLARIO 2.3.8.** *Sea  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  un morfismo étale en  $\mathrm{Sfn}$ . Para todo morfismo  $\mathfrak{Y} \rightarrow \mathfrak{S}$  de pseudo tipo finito en  $\mathrm{Sfn}$  se verifica que*

$$f^* \widehat{\Omega}_{\mathfrak{Y}/\mathfrak{S}}^1 \cong \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{S}}^1$$

**DEMOSTRACIÓN.** Es consecuencia del resultado anterior y de la Proposición 2.3.2.  $\square$

**PROPOSICIÓN 2.3.9.** *Sea  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  un morfismo en  $\mathrm{Sfn}$  de pseudo tipo finito y  $\mathfrak{Y} \xrightarrow{g} \mathfrak{S}$  un morfismo liso en  $\mathrm{Sfn}$ . Las siguientes condiciones son equivalentes:*

- (1)  $f$  es liso
- (2)  $g \circ f$  es liso y la sucesión

$$0 \rightarrow f^* \widehat{\Omega}_{\mathfrak{Y}/\mathfrak{S}}^1 \rightarrow \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{S}}^1 \rightarrow \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^1 \rightarrow 0$$

*es exacta y localmente escindida.*

**DEMOSTRACIÓN.** La implicación (1)  $\Rightarrow$  (2) es consecuencia de la Propiedad 2.2.11 y de la Proposición 2.3.7.

Para probar que (2)  $\Rightarrow$  (1) podemos suponer que  $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A) \xrightarrow{f} \mathfrak{Y} = \mathrm{Spf}(B)$  y  $\mathfrak{Y} = \mathrm{Spf}(B) \xrightarrow{g} \mathfrak{S} = \mathrm{Spf}(C)$  están en  $\mathrm{Sfn}_{\mathrm{af}}$  siendo  $B$  y  $A$  dos  $C$ -álgebras formalmente lisas. Probemos que  $A$  es una  $B$ -álgebra formalmente lisa. Sea  $E$  un anillo discreto,  $I \subset E$  un ideal de cuadrado nulo y consideremos un diagrama conmutativo de homomorfismos continuos de anillos

topológicos

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & A \\ & & \downarrow \lambda & & \downarrow u \\ & & E & \xrightarrow{j} & E/I \end{array}$$

Por ser  $A$  una  $C$ -álgebra formalmente lisa, existe  $A \xrightarrow{v} E$  un homomorfismo continuo de  $C$ -álgebras topológicas tal que  $v \circ g \circ f = \lambda \circ f$  y  $j \circ v = u$ . Entonces por 2.2.17.(1) se tiene que  $d := \lambda - v \circ g \in \text{Dercont}_C(B, E)$ . Por otra parte, de la hipótesis y por la equivalencia de categorías 2.1.13.(3) se tiene que la sucesión de  $A$ -módulos de tipo finito

$$0 \rightarrow \widehat{\Omega}_{B/C}^1 \otimes_B A \rightarrow \widehat{\Omega}_{A/C}^1 \rightarrow \widehat{\Omega}_{A/B}^1 \rightarrow 0$$

es exacta y escindida. Además, como el morfismo  $v$  es continuo y  $E$  es discreto existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $E$  es un  $A/J^{n+1}$ -módulo. Entonces se tiene que la aplicación inducida  $\text{Hom}_A(\Omega_{A/C}^1, E) \rightarrow \text{Hom}_A(\Omega_{B/C}^1, E)$  es sobreyectiva y, aplicando 2.1.5 se tiene que la aplicación

$$\text{Der}_C(A, E) \rightarrow \text{Der}_C(B, E)$$

es sobreyectiva, de donde se sigue que existe  $d' \in \text{Der}_C(A, E)$  tal que  $d' \circ g = d$ . Si definimos  $v' := v + d'$ , se verifica que  $v' \circ g = \lambda$  y que  $j \circ v' = u$  de donde se concluye que  $A$  es una  $B$ -álgebra formalmente lisa.  $\square$

**COROLARIO 2.3.10.** Sean  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  y  $\mathfrak{Y} \xrightarrow{g} \mathfrak{S}$  dos morfismos de pseudo tipo finito tal que  $g \circ f$  y  $g$  son morfismos lisos. Entonces,  $f$  es étale si, y sólo si,  $f^* \widehat{\Omega}_{\mathfrak{Y}/\mathfrak{S}}^1 \cong \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{S}}^1$ .

**DEMOSTRACIÓN.** Es consecuencia de la proposición anterior y de la Proposición 2.3.2.  $\square$

**PROPOSICIÓN 2.3.11.** (Criterio jacobiano de Zariski para anillos preádicos) Sea  $B \rightarrow A$  un morfismo continuo de anillos preádicos y supongamos que  $A$  es una  $B$ -álgebra formalmente lisa. Dado  $I \subset A$  un ideal las siguientes condiciones son equivalentes:

- (1)  $A' = A/I$  es una  $B$ -álgebra formalmente lisa.
- (2) Dado  $J \subset A$  un ideal de definición de  $A$ , si escribimos  $A'_n = A'/(J^{n+1} + I)$ , la sucesión de  $A'_n$ -módulos

$$0 \rightarrow \frac{I}{I^2} \otimes_{A'} A'_n \xrightarrow{\delta_n} \Omega_{A/B}^1 \otimes_A A'_n \xrightarrow{\Phi_n} \Omega_{A'/B}^1 \otimes_{A'} A'_n \rightarrow 0$$

es exacta y escindida, para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

- (3) La sucesión de  $\widehat{A}'$ -módulos

$$0 \rightarrow \frac{\widehat{I}}{I^2} \xrightarrow{\delta} \Omega_{A/B}^1 \widehat{\otimes}_A A' \xrightarrow{\Phi} \widehat{\Omega}_{A'/B}^1 \rightarrow 0$$

es exacta y escindida.

DEMOSTRACIÓN. La equivalencia (1)  $\Leftrightarrow$  (2) se deduce de [EGA IV<sub>1</sub>, (0.22.6.1), (0.19.1.5), (0.19.1.7)] y de la Segunda sucesión exacta fundamental asociada a los morfismos  $B \rightarrow A \rightarrow A'$ . Veamos que (2)  $\Leftrightarrow$  (3). Como  $A'$  es una  $B$ -álgebra formalmente lisa del Lema 2.3.4 se deduce que  $\Omega_{A'/B}^1 \otimes_{A'} A'_n$  es un  $A'_n$ -módulo proyectivo, para cada  $n \in \mathbb{N}$  y, por lo tanto basta aplicar 2.3.6.(2) para obtener el resultado.  $\square$

COROLARIO 2.3.12. (*Criterio jacobiano de Zariski para esquemas formales*) Sea  $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A) \xrightarrow{f} \mathfrak{Y} = \mathrm{Spf}(B)$  un morfismo liso en  $\mathrm{Sfn}_{\mathrm{af}}$  y  $\mathfrak{X}' \hookrightarrow \mathfrak{X}$  un encaje cerrado dado por un Ideal  $\mathcal{I} = I^\Delta \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ . Son equivalentes:

- (1) La composición  $\mathfrak{X}' \hookrightarrow \mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  es un morfismo liso.
- (2) Dado  $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$  un Ideal de definición, si  $\mathcal{O}_{X'_n} = \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/(\mathcal{J}^{n+1} + \mathcal{I})$ , la sucesión de  $\mathcal{O}_{X'_n}$ -Módulos coherentes

$$0 \rightarrow \frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I}^2} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}} \mathcal{O}_{X'_n} \xrightarrow{\delta_n} \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^1 \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{O}_{X'_n} \xrightarrow{\Phi_n} \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}'/\mathfrak{Y}}^1 \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}} \mathcal{O}_{X'_n} \rightarrow 0$$

es exacta y localmente escindida, para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

- (3) La sucesión de  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}$ -Módulos coherentes

$$0 \rightarrow \frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I}^2} \xrightarrow{\delta} \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^1 \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}'} \xrightarrow{\Phi} \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}'/\mathfrak{Y}}^1 \rightarrow 0$$

es exacta y localmente escindida.

DEMOSTRACIÓN. Por la equivalencia de categorías 2.1.13.(3) basta aplicar la proposición anterior.  $\square$



## CAPÍTULO 3

### Caracterización de las condiciones infinitesimales

En las Secciones 2.2 y 2.3 se ha visto que los sorites y los resultados fundamentales de las condiciones infinitesimales en  $\mathbf{Sfn}$  son análogos a las mismas propiedades en  $\mathbf{Sch}$ . Dado  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  un morfismo en  $\mathbf{Sfn}$  existen Ideales de definición de  $\mathfrak{X}$  e  $\mathfrak{Y}$  respecto a los cuales  $f = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} f_n$ . Es lógico,

pues, preguntarse qué relación existe entre las condiciones infinitesimales del morfismo  $f$  y las condiciones infinitesimales de los morfismos de esquemas  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ . En este capítulo se distinguen dos partes. En la primera parte (Secciones 3.1, 3.2 y 3.3) se verá que existe una estrecha relación entre las condiciones infinitesimales de un morfismo ádico  $f = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} f_n$  y las

condiciones infinitesimales del morfismo  $f_0$  en  $\mathbf{Sch}$ . En la Sección 3.4 se caracterizan dos clases importantes de morfismos étales: los encajes abiertos y los morfismos de compleción. Uno de los resultados más importantes es el Teorema 3.4.5 en el que dado  $\mathfrak{Y} = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} Y_n$  en  $\mathbf{Sfn}$  se establece una

equivalencia de categorías entre los  $\mathfrak{Y}$ -esquemas formales étales ádicos y los  $Y_0$ -esquemas étales. En ausencia de la hipótesis ádica el comportamiento de las condiciones infinitesimales no se puede reducir al estudio de las condiciones infinitesimales en la categoría de esquemas (véase el Ejemplo 3.2.3). Este hecho motiva el desarrollo de nuevas técnicas en la Sección 3.5 para el estudio de las condiciones infinitesimales en el caso no ádico. La sección se centra en dos de los resultados principales de esta memoria (Teorema 3.5.2 y Teorema 3.5.3) en los que se demuestra que todo morfismo liso y todo morfismo étale es localmente y, salvo un morfismo de compleción, un morfismo liso ádico y un morfismo étale ádico, respectivamente. Estos resultados proporcionan la caracterización local de la estructura de los morfismos lisos y étales de esquemas formales.

#### 3.1. Morfismos no ramificados

Comenzaremos relacionando el carácter no ramificado de un morfismo  $f = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} f_n$  en  $\mathbf{Sfn}$  y de los morfismos de esquemas  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ .

PROPOSICIÓN 3.1.1. *Dado  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  en Sfn sean  $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$  y  $\mathcal{K} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$  Ideales de definición tales que  $f^*(\mathcal{K})\mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \subset \mathcal{J}$ . El morfismo  $f$  es no ramificado si, y sólo si,  $X_n \xrightarrow{f_n} Y_n$  es no ramificado, para todo  $n \in \mathbb{N}$ .*

DEMOSTRACIÓN. Aplicando la Proposición 2.3.2 la demostración se reduce a probar que  $\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^1 = 0$  si, y sólo si, para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\Omega_{X_n/Y_n}^1 = 0$ . Si  $\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^1 = 0$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$  por la Segunda sucesión exacta fundamental (2.1.30.6) asociada a los morfismos  $X_n \hookrightarrow \mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  se tiene que  $\Omega_{X_n/\mathfrak{Y}}^1 = 0$  y, de la Primera sucesión exacta fundamental (2.1.27.5) asociada a los morfismos  $X_n \xrightarrow{f_n} Y_n \hookrightarrow \mathfrak{Y}$ , resulta que  $\Omega_{X_n/Y_n}^1 = 0$ . Recíprocamente, si para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\Omega_{X_n/Y_n}^1 = 0$ , por la Proposición 2.1.20 se verifica que  $\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^1 = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \Omega_{X_n/Y_n}^1 = 0$ .  $\square$

COROLARIO 3.1.2. *Sea  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  un morfismo en Sfn y sean  $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$  y  $\mathcal{K} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$  Ideales de definición tales que  $f^*(\mathcal{K})\mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \subset \mathcal{J}$ . Si el morfismo inducido  $X_n \xrightarrow{f_n} Y_n$  es un encaje, para todo  $n \in \mathbb{N}$ , entonces  $f$  es no ramificado.*

En la clase de los morfismos ádicos en Sfn para determinar cuando un morfismo  $f$  es no ramificado se tiene el siguiente criterio, más fuerte que el resultado que proporciona la proposición anterior:

PROPOSICIÓN 3.1.3. *Sea  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  un morfismo ádico en Sfn y  $\mathcal{K} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$  un Ideal de definición. Escribamos  $f = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} f_n$  respecto a los Ideales de definición  $\mathcal{K} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$  y  $\mathcal{J} = f^*(\mathcal{K})\mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ . El morfismo  $f$  es no ramificado si, y sólo si, el morfismo  $X_0 \xrightarrow{f_0} Y_0$  es no ramificado.*

DEMOSTRACIÓN. Si  $f$  es no ramificado por la Proposición 3.1.1 se tiene que  $f_0$  es no ramificado. Recíprocamente, supongamos que  $f_0$  es no ramificado y probemos que  $\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^1 = 0$ . Por hipótesis se tiene que  $\Omega_{X_0/Y_0}^1 = 0$  y, entonces, por ser  $f$  ádico resulta que

$$\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^1 \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{O}_{X_0} \stackrel{2.1.25}{=} \Omega_{X_0/Y_0}^1 = 0 \quad (3.1.3.1)$$

Ahora bien, podemos suponer que  $\mathfrak{X} = \text{Spf}(A) \xrightarrow{f} \mathfrak{Y} = \text{Spf}(B)$  está en  $\text{Sfn}_{\text{af}}$  y que  $\mathcal{J} = J^\Delta$ , con  $J \subset A$  un ideal de definición. Entonces por la equivalencia de categorías 2.1.13.(3), la igualdad (3.1.3.1) es equivalente a que  $\widehat{\Omega}_{A/B}^1/J\widehat{\Omega}_{A/B}^1 = 0$ . Por otra parte, como  $A$  es un anillo  $J$ -ádico se verifica que  $J \subset J_A$  ( $J_A$  es el radical de Jacobson de  $A$ ) y además, la Proposición 2.1.9 demuestra que  $\widehat{\Omega}_{A/B}^1$  es un  $A$ -módulo de tipo finito. Entonces del Lema de Nakayama se deduce que  $\widehat{\Omega}_{A/B}^1 = 0$  y, por lo tanto,  $\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^1 = (\widehat{\Omega}_{A/B}^1)^\Delta = 0$ . Aplicando la Proposición 2.3.2 resulta que  $f$  es no ramificado.  $\square$



El siguiente ejemplo ilustra que en el caso no ádico no se verifica el análogo de la proposición anterior.

**EJEMPLO 3.1.4.** Sea  $K$  un cuerpo y  $\mathbb{D}_K^1 \xrightarrow{p} \text{Spec}(K)$  el morfismo de proyección del disco formal de dimensión 1 sobre  $\text{Spec}(K)$ . En el Ejemplo 2.1.26 se ha visto que  $\widehat{\Omega}_p^1 = (K[[T]])^{\wedge} \widehat{dT}$  y, por lo tanto, resulta que  $\mathbb{D}_K^1$  es ramificado sobre  $K$  (Proposición 2.3.2). Sin embargo, dado el ideal de definición  $[[T]] \subset K[[T]]$  de modo que  $p = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} p_n$  se verifica que  $\Omega_{p_0}^1 = 0$ , con lo cual  $p_0$  es no ramificado.

A la vista de este ejemplo, nuestro próximo objetivo será determinar cuándo un morfismo  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y} = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} (X_n \xrightarrow{f_n} Y_n)$  en  $\text{Sfn}$  con  $f_0$  no ramificado y no necesariamente ádico, es no ramificado (Corolario 3.1.10). Para ello, necesitamos resultados que describan el comportamiento local de los morfismos no ramificados. A continuación se dan las caracterizaciones locales de los morfismos no ramificados en  $\text{Sfn}$ , que generalizan a las caracterizaciones análogas en la categoría de esquemas (cf. [EGA IV<sub>4</sub>, (17.4.1)]).

**PROPOSICIÓN 3.1.5.** *Sea  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  un morfismo en  $\text{Sfn}$  de pseudo tipo finito y  $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$  y  $\mathcal{K} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$  Ideales de definición tales que  $f^*(\mathcal{K})\mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \subset \mathcal{J}$ . Dado  $x \in \mathfrak{X}$  e  $y = f(x)$  las siguientes condiciones son equivalentes:*

- (1)  $f$  es no ramificado en  $x$ .
- (2)  $f^{-1}(y)$  es un  $k(y)$ -esquema formal no ramificado en  $x$ .
- (3)  $\mathfrak{m}_{\mathfrak{X},x} \widehat{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},x}} = \mathfrak{m}_{\mathfrak{Y},y} \widehat{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},x}}$  y  $k(x)|k(y)$  es una extensión finita y separable.
- (4)  $\widehat{\Omega}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},x}/\mathcal{O}_{\mathfrak{Y},y}}^1 = 0$
- (4')  $(\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^1)_x = 0$
- (5)  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},x}$  es una  $\mathcal{O}_{\mathfrak{Y},y}$ -álgebra formalmente no ramificada para las topologías ádicas.
- (5')  $\widehat{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},x}}$  es una  $\widehat{\mathcal{O}_{\mathfrak{Y},y}}$ -álgebra formalmente no ramificada para las topologías ádicas.

**DEMOSTRACIÓN.** (1)  $\Leftrightarrow$  (2) Por la Proposición 3.1.1,  $f$  es no ramificado en  $x$  si, y sólo si,  $X_n \xrightarrow{f_n} Y_n$  es no ramificado en  $x$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Además, aplicando [EGA IV<sub>4</sub>, (17.4.1)] se tiene que es equivalente a que  $f_n^{-1}(y)$  es un  $k(y)$ -esquema no ramificado en  $x$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ , lo cual es equivalente a que  $f^{-1}(y) \stackrel{1.2.10}{=} \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} f_n^{-1}(y)$  es un  $k(y)$ -esquema formal no ramificado en  $x$  (véase la Proposición 3.1.1).

(1)  $\Leftrightarrow$  (3) La afirmación (1) es equivalente a que  $X_n \xrightarrow{f_n} Y_n$  es no ramificado en  $x$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$  y, aplicando [EGA IV<sub>4</sub>, loc. cit.] resulta que

$k(x)|k(y)$  es una extensión finita y separable, y que  $\mathfrak{m}_{X_n,x} = \mathfrak{m}_{Y_n,y}\mathcal{O}_{X_n,x}$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Como consecuencia,

$$\mathfrak{m}_{\mathfrak{X},x}\widehat{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},x}} = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{m}_{X_n,x} = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{m}_{Y_n,y}\mathcal{O}_{X_n,x} = \mathfrak{m}_{\mathfrak{Y},y}\widehat{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},x}}$$

(3)  $\Rightarrow$  (4) Como  $k(x)|k(y)$  es una extensión finita y separable se tiene que  $\Omega_{k(x)/k(y)}^1 = 0$  y, por lo tanto, se verifica que

$$\widehat{\Omega}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},x}/\mathcal{O}_{\mathfrak{Y},y}}^1 \otimes_{\widehat{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},x}}} k(x) \stackrel{2.1.10.(1)}{=} \widehat{\Omega}_{(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},x} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{Y},y}} k(y))/k(y)}^1 \stackrel{(3)}{=} \Omega_{k(x)/k(y)}^1 = 0$$

Por otra parte, de 2.1.11.(2) se deduce que  $\widehat{\Omega}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},x}/\mathcal{O}_{\mathfrak{Y},y}}^1$  es un  $\widehat{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},x}}$ -módulo de tipo finito y entonces, por el Lema de Nakayama resulta que  $\widehat{\Omega}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},x}/\mathcal{O}_{\mathfrak{Y},y}}^1 = 0$ .

(4)  $\Leftrightarrow$  (4') Por 2.1.11.(2) se verifica que  $(\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^1)_x$  es un  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},x}$ -módulo de tipo finito y, por lo tanto, resulta que

$$\widehat{\Omega}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},x}/\mathcal{O}_{\mathfrak{Y},y}}^1 \stackrel{2.1.10.(3)}{=} (\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^1)_x = (\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^1)_x \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},x}} \widehat{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},x}}$$

Entonces, como  $\widehat{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},x}}$  es una  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},x}$ -álgebra fielmente plana se verifica que  $\widehat{\Omega}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},x}/\mathcal{O}_{\mathfrak{Y},y}}^1 = 0$  si, y sólo si,  $(\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^1)_x = 0$ .

(4)  $\Leftrightarrow$  (5) Es consecuencia del Lema 2.3.1.

(5)  $\Leftrightarrow$  (5') Basta aplicar el Lema 2.2.7.

(4')  $\Rightarrow$  (1) Como  $\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^1 \in \text{Coh}(\mathfrak{X})$  (Proposición 2.1.18), la afirmación (4') implica que existe  $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{X}$  un abierto con  $x \in \mathfrak{U}$  tal que  $(\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^1)|_{\mathfrak{U}} = 0$  y, por lo tanto, por la Proposición 2.3.2 se tiene que  $f$  es no ramificado en  $x$ .  $\square$

**COROLARIO 3.1.6.** *Sea  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  un morfismo en Sfn de pseudo tipo finito y sean  $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$  y  $\mathcal{K} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$  Ideales de definición tales que  $f^*(\mathcal{K})\mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \subset \mathcal{J}$ . Las siguientes condiciones son equivalentes:*

- (1)  $f$  es no ramificado.
- (2) Para todo  $x \in \mathfrak{X}$ ,  $y = f(x)$ ,  $f^{-1}(y)$  es un  $k(y)$ -esquema formal no ramificado en  $x$ .
- (3) Para todo  $x \in \mathfrak{X}$ ,  $y = f(x)$ ,  $\mathfrak{m}_{\mathfrak{X},x}\widehat{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},x}} = \mathfrak{m}_{\mathfrak{Y},y}\widehat{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},x}}$  y  $k(x)|k(y)$  es una extensión finita y separable.
- (4)  $\widehat{\Omega}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},x}/\mathcal{O}_{\mathfrak{Y},y}}^1 = 0$ , para todo  $x \in \mathfrak{X}$  con  $y = f(x)$ .
- (4') Para todo  $x \in \mathfrak{X}$ ,  $(\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^1)_x = 0$ .
- (5) Para todo  $x \in \mathfrak{X}$ ,  $y = f(x)$ ,  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},x}$  es una  $\mathcal{O}_{\mathfrak{Y},y}$ -álgebra formalmente no ramificada para las topologías ádicas.
- (5') Para todo  $x \in \mathfrak{X}$ ,  $y = f(x)$ ,  $\widehat{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},x}}$  es una  $\widehat{\mathcal{O}_{\mathfrak{Y},y}}$ -álgebra formalmente no ramificada para las topologías ádicas.

**COROLARIO 3.1.7.** *Sea  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  un morfismo en Sfn de pseudo tipo finito. Si  $f$  es no ramificado en  $x \in \mathfrak{X}$ , entonces  $f$  es un cuasirevestimiento en  $x$ .*

DEMOSTRACIÓN. Por la afirmación (3) de la Proposición 3.1.5 se tiene que  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},x} \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{Y},f(x)}} k(f(x)) = k(x)$  con  $k(x)|k(f(x))$  una extensión finita y, por lo tanto,  $f$  es un cuasirevestimiento en  $x$  (véase la Definición 1.3.7).  $\square$

COROLARIO 3.1.8. *Sea  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  un morfismo en Sfn de pseudo tipo finito. Si  $f$  es no ramificado en  $x \in \mathfrak{X}$ , entonces  $\dim_x f = 0$ .*

DEMOSTRACIÓN. Es consecuencia de la Propiedad 1.3.10 y del corolario anterior.  $\square$

PROPOSICIÓN 3.1.9. *Sea  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  un morfismo en Sfn de pseudo tipo finito y sean  $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$  y  $\mathcal{K} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$  Ideales de definición tales que  $f^*(\mathcal{K})\mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \subset \mathcal{J}$ . Dados  $x \in \mathfrak{X}$  e  $y = f(x)$  son equivalentes:*

- (1)  $f$  es no ramificado en  $x$
- (2)  $X_0 \xrightarrow{f_0} Y_0$  es no ramificado en  $x$  y  $\widehat{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},x}} \otimes_{\widehat{\mathcal{O}_{\mathfrak{Y},y}}} k(y) = k(x)$

DEMOSTRACIÓN. (1)  $\Rightarrow$  (2) Si  $f$  es no ramificado en  $x$ , entonces  $f_0$  es no ramificado en  $x$  (Proposición 3.1.1). Además, la afirmación (3) de la Proposición 3.1.5 implica que  $\widehat{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},x}} \otimes_{\widehat{\mathcal{O}_{\mathfrak{Y},y}}} k(y) = k(x)$ . Probemos que (2)  $\Rightarrow$  (1). Por ser  $f_0$  no ramificado en  $x$  se tiene que  $k(x)|k(y)$  es una extensión finita y separable (cf. [EGA IV<sub>4</sub>, (17.4.1)]). Por otro lado de la igualdad  $\widehat{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},x}} \otimes_{\widehat{\mathcal{O}_{\mathfrak{Y},y}}} k(y) = k(x)$  se deduce que  $\mathfrak{m}_{\mathfrak{X},x} \widehat{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},x}} = \mathfrak{m}_{\mathfrak{Y},y} \widehat{\mathcal{O}_{\mathfrak{Y},y}}$ . Entonces, el morfismo  $f$  y el punto  $x$  verifican la afirmación (3) de la Proposición 3.1.5 y resulta que  $f$  es no ramificado en  $x$ .  $\square$

Ahora ya estamos en condiciones de enunciar la versión no ádica de la Proposición 3.1.3:

COROLARIO 3.1.10. *Dado  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  un morfismo en Sfn de pseudo tipo finito sean  $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$  y  $\mathcal{K} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$  Ideales de definición tales que  $f^*(\mathcal{K})\mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \subset \mathcal{J}$ . Las siguientes condiciones son equivalentes:*

- (1) *El morfismo  $f$  es no ramificado.*
- (2) *El morfismo  $f_0$  es no ramificado y para todo  $x \in \mathfrak{X}$ ,  $f^{-1}(y) = f_0^{-1}(y)$  con  $y = f(x)$ .*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que  $f$  es no ramificado y fijemos  $x \in \mathfrak{X}$  con  $y = f(x)$ . Por la Proposición 3.1.9 se tiene que  $f_0$  es no ramificado y que  $\widehat{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},x}} \otimes_{\widehat{\mathcal{O}_{\mathfrak{Y},y}}} k(y) = k(x)$ . Por lo tanto,  $\mathcal{J} \cdot (\widehat{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},x}} \otimes_{\widehat{\mathcal{O}_{\mathfrak{Y},y}}} k(y)) = 0$  y, aplicando el Lema 3.1.11 a continuación se deduce que  $f^{-1}(y) = f_0^{-1}(y)$ . Recíprocamente, supongamos que se verifica (2) y veamos que dado  $x \in \mathfrak{X}$  arbitrario, el morfismo  $f$  es no ramificado en  $x$ . Si  $y = f(x)$ , se tiene que  $f_0^{-1}(y)$  es un  $k(y)$ -esquema no ramificado en  $x$  (cf. [EGA IV<sub>4</sub>, (17.4.1)]) y como  $f^{-1}(y) = f_0^{-1}(y)$ , de la Proposición 3.1.5 resulta que  $f$  es no ramificado en  $x$ .  $\square$

LEMA 3.1.11. *Sea  $A$  un anillo  $J$ -ádico noetheriano tal que para todo ideal primo abierto  $\mathfrak{p} \subset A$ ,  $J_{\mathfrak{p}} = 0$ . Entonces  $J = 0$  y, por lo tanto, la topología  $J$ -ádica en  $A$  es la discreta.*

DEMOSTRACIÓN. Como todo ideal maximal  $\mathfrak{m} \subset A$  es abierto para la topología  $J$ -ádica, se tiene que  $J_{\mathfrak{m}} = 0$ , para todo ideal maximal  $\mathfrak{m} \subset A$  y se deduce el resultado.  $\square$

3.1.12. Como consecuencia del Corolario 3.1.10 resulta que:

- Si  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  es un morfismo no ramificado en Sfn entonces  $f^{-1}(y)$  es un esquema (usual) para todo  $x \in \mathfrak{X}$  siendo  $y = f(x)$ .
  - En el Corolario 3.1.6 la afirmación (2) se puede escribir
- 2') *Para todo  $x \in \mathfrak{X}$ ,  $y = f(x)$ ,  $f^{-1}(y)$  es un  $k(y)$ -esquema no ramificado en  $x$ .*

A partir de la Proposición 3.1.5 se obtiene el siguiente resultado, en el que se da una descripción de los pseudo encajes cerrados que será utilizada en la caracterización de los morfismos de compleción (Teorema 3.4.4).

COROLARIO 3.1.13. *Dado  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  en Sfn, sean  $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$  y  $\mathcal{K} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$  Ideales de definición tales que  $f^*(\mathcal{K})\mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \subset \mathcal{J}$  respecto a los cuales  $f = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} f_n$ . El morfismo  $f$  es un pseudo encaje cerrado si, y sólo si,  $f$  es no ramificado y  $X_0 \xrightarrow{f_0} Y_0$  es un encaje cerrado.*

DEMOSTRACIÓN. Si  $f$  es un pseudo encaje cerrado, por el Corolario 3.1.2 resulta que  $f$  es no ramificado. Recíprocamente, supongamos que  $f$  es no ramificado y que  $f_0$  es un encaje cerrado y veamos que  $X_n \xrightarrow{f_n} Y_n$  es un encaje cerrado, para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Por [EGA I, (4.2.2.(ii))] basta ver que, para todo  $x \in \mathfrak{X}$  con  $y = f(x)$ , el morfismo  $\mathcal{O}_{Y_n, y} \rightarrow \mathcal{O}_{X_n, x}$  es sobreyectivo, para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Fijemos  $x \in \mathfrak{X}$ ,  $y = f(x) \in \mathfrak{Y}$  y  $n \in \mathbb{N}$ . Como  $f_0$  es un encaje cerrado, por [EGA I, loc. cit.], se tiene que  $\mathcal{O}_{Y_0, y} \rightarrow \mathcal{O}_{X_0, x}$  es sobreyectivo y, por lo tanto,  $\mathrm{Spf}(\widehat{\mathcal{O}_{X_0, x}}) \rightarrow \mathrm{Spf}(\widehat{\mathcal{O}_{Y_0, y}})$  es un morfismo pseudo finito, con lo cual, el morfismo  $\mathcal{O}_{Y_n, y} \rightarrow \mathcal{O}_{X_n, x}$  es finito (véase la Definición 1.3.1). Por otro lado, como  $f$  es no ramificado por la Proposición 3.1.1 se tiene que  $f_n$  es no ramificado y, por lo tanto, aplicando la Proposición 3.1.5 se tiene que  $\mathfrak{m}_{Y_n, y}\mathcal{O}_{X_n, x} = \mathfrak{m}_{X_n, x}$ . Entonces por el Lema de Nakayama se concluye que  $\mathcal{O}_{Y_n, y} \rightarrow \mathcal{O}_{X_n, x}$  es un morfismo sobreyectivo, para todo  $n \in \mathbb{N}$ .  $\square$

### 3.2. Morfismos lisos

Los contenidos de esta sección se pueden estructurar en dos partes. En la primera parte, se estudia la relación entre la lisitud de un morfismo  $f = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} f_n$  en Sfn y la de los morfismos  $f_n$  y se caracterizan localmente los

morfismos lisos. En la segunda parte, se da una factorización local para los morfismos lisos (Proposición 3.2.9). Probamos además el Criterio jacobiano (Corolario 3.2.13) que es un criterio matricial útil para determinar cuándo un subesquema cerrado del espacio formal afín y del disco formal afín es liso.

**PROPOSICIÓN 3.2.1.** *Dado  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  en  $\text{Sfn}$  sean  $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$  y  $\mathcal{K} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$  Ideales de definición con  $f^*(\mathcal{K})\mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \subset \mathcal{J}$  respecto a los cuales  $f = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} f_n$ .*

*Si  $X_n \xrightarrow{f_n} Y_n$  es liso, para todo  $n \in \mathbb{N}$ , entonces  $f$  es liso.*

**DEMOSTRACIÓN.** Por la Proposición 2.2.19 podemos suponer que  $f$  está en  $\text{Sfn}_{\text{af}}$ . Sean  $Z$  un esquema afín,  $Z \xrightarrow{w} \mathfrak{Y}$  un morfismo,  $T \hookrightarrow Z$  un  $\mathfrak{Y}$ -subesquema cerrado dado por un Ideal de cuadrado nulo y consideremos  $T \xrightarrow{u} \mathfrak{X}$  un  $\mathfrak{Y}$ -morfismo. Como  $f$  y  $w$  son morfismos de esquemas formales afines se encuentra un número  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $w^*(\mathcal{K}^{k+1})\mathcal{O}_Z = 0$  y  $u^*(\mathcal{J}^{k+1})\mathcal{O}_T = 0$  y, entonces  $u$  y  $w$  se factorizan en  $T \xrightarrow{u_k} X_k \xrightarrow{i_k} \mathfrak{X}$  y  $Z \xrightarrow{w_k} Y_k \xrightarrow{i_k} \mathfrak{Y}$ , respectivamente. Por ser  $f_k$  formalmente liso, existe un  $Y_k$ -morfismo  $Z \xrightarrow{v_k} X_k$  tal que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 T & \hookrightarrow & Z \\
 \downarrow u_k & \swarrow v_k & \downarrow w_k \\
 X_k & \xrightarrow{f_k} & Y_k \\
 \downarrow i_k & & \downarrow \\
 \mathfrak{X} & \xrightarrow{f} & \mathfrak{Y}
 \end{array}$$

Entonces el  $\mathfrak{Y}$ -morfismo  $v := i_k \circ v_k$  verifica que  $v|_T = u$  y, por lo tanto,  $f$  es formalmente liso. Además, como  $f_0$  es un morfismo de tipo finito, se verifica que  $f$  es de pseudo tipo finito y, por lo tanto,  $f$  es liso.  $\square$

**COROLARIO 3.2.2.** *Sea  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  un morfismo en  $\text{Sfn}$  ádico y consideremos  $\mathcal{K} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$  un Ideal de definición. El morfismo  $f$  es liso si, y sólo si, los morfismos  $X_n \xrightarrow{f_n} Y_n$ , determinados por los Ideales de definición  $\mathcal{K} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$  y  $\mathcal{J} = f^*(\mathcal{K})\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ , son lisos,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Si  $f$  es ádico, por la Proposición 1.2.5, se tiene que para todo  $n \in \mathbb{N}$  los siguientes diagramas son cuadrados cartesianos:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathfrak{X} & \xrightarrow{f} & \mathfrak{Y} \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 X_n & \xrightarrow{f_n} & Y_n
 \end{array}$$

Entonces por cambio de base (Propiedades 2.2.12) se tiene que  $f_n$  es liso, para todo  $n \in \mathbb{N}$ . El recíproco es consecuencia de la proposición anterior.  $\square$

En el siguiente ejemplo se muestra que el recíproco de la Proposición 3.2.1 no se verifica en general.

**EJEMPLO 3.2.3.** Sea  $K$  un cuerpo y  $\mathbb{A}_K^1 = \text{Spec}(K[T])$ . Dado el cerrado  $X' = V(\langle T \rangle) \subset \mathbb{A}_K^1$ , el Corolario 2.2.21 implica que el morfismo canónico de completación de  $\mathbb{A}_K^1$  a lo largo de  $X'$

$$\mathbb{D}_K^1 \xrightarrow{\kappa} \mathbb{A}_K^1$$

es étale. Sin embargo, tomando en  $\mathbb{A}_K^1$  el Ideal de definición 0, los morfismos

$$\text{Spec}(K[T]/\langle T \rangle^{n+1}) \xrightarrow{\kappa_n} \mathbb{A}_K^1$$

no son planos de donde se sigue que  $\kappa_n$  no es liso, para todo  $n \in \mathbb{N}$  (véase la Proposición 2.3.5).

Nuestro próximo objetivo será determinar la relación entre la lisitud de un morfismo  $f = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} f_n$  y la de  $f_0$  (Corolarios 3.2.6 y 3.2.8). Para ello, necesitamos caracterizar localmente la lisitud.

**PROPOSICIÓN 3.2.4.** *Sea  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  un morfismo en  $\text{Sfn}$  de pseudo tipo finito y sean  $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$  y  $\mathcal{K} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$  Ideales de definición tales que  $f^*(\mathcal{K})\mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \subset \mathcal{J}$ . Dado  $x \in \mathfrak{X}$ ,  $y = f(x)$  las siguientes condiciones son equivalentes:*

- (1) *El morfismo  $f$  es liso en  $x$ .*
- (2)  *$\mathcal{O}_{\mathfrak{X},x}$  es una  $\mathcal{O}_{\mathfrak{Y},y}$ -álgebra formalmente lisa para las topologías ádicas.*
- (3)  *$\widehat{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},x}}$  es una  $\widehat{\mathcal{O}_{\mathfrak{Y},y}}$ -álgebra formalmente lisa para las topologías ádicas.*
- (4) *El morfismo  $f$  es plano en  $x$  y  $f^{-1}(y)$  es un  $k(y)$ -esquema formal liso en  $x$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Como es una cuestión local y  $f$  es de pseudo tipo finito, podemos suponer que  $\mathfrak{X} = \text{Spf}(A) \xrightarrow{f} \mathfrak{Y} = \text{Spf}(B)$  está en  $\text{Sfn}_{\text{af}}$ , con  $A = B\{T_1, \dots, T_r\}[[Z_1, \dots, Z_s]]/I$  e  $I \subset B' := B\{\mathbf{T}\}[[\mathbf{Z}]]$  un ideal. Sea  $\mathfrak{p} \subset A$  el ideal primo abierto correspondiente a  $x$ ,  $\mathfrak{q} \subset B'$  tal que  $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}/I$  y  $\mathfrak{r} \subset B$  el ideal primo abierto correspondiente a  $y$ .

(1)  $\Rightarrow$  (3) Cambiando  $\mathfrak{X}$  por un entorno abierto de  $x$  lo suficientemente pequeño podemos suponer que  $A$  es una  $B$ -álgebra formalmente lisa. Entonces, por [EGA IV<sub>1</sub>, (0.19.3.5)] se tiene que  $A_{\mathfrak{p}}$  es una  $B_{\mathfrak{r}}$ -álgebra formalmente lisa y, el Lema 2.2.7 implica que  $\widehat{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},x}} = \widehat{A}_{\mathfrak{p}}$  es una  $\widehat{\mathcal{O}_{\mathfrak{Y},y}} = \widehat{B}_{\mathfrak{r}}$ -álgebra formalmente lisa.

(2)  $\Leftrightarrow$  (3) Es consecuencia del Lema 2.2.7.

(3)  $\Rightarrow$  (1) Por el Lema 2.2.7 la afirmación (3) es equivalente a que  $A_{\mathfrak{p}}$  es una  $B_{\mathfrak{r}}$ -álgebra formalmente lisa. Entonces el Criterio jacobiano de Zariski

(Proposición 2.3.11) implica que el morfismo de  $\widehat{A}_{\mathfrak{p}}$ -módulos

$$\frac{\widehat{I}_{\mathfrak{q}}}{\widehat{I}_{\mathfrak{q}}^2} \rightarrow \Omega_{B'_{\mathfrak{q}}/B_{\mathfrak{r}}}^1 \widehat{\otimes}_{B'_{\mathfrak{q}}} A_{\mathfrak{p}}$$

es inversible a la derecha y, como  $\widehat{A}_{\mathfrak{p}}$  es  $A_{\{\mathfrak{p}\}}$ -álgebra fielmente plana y  $(\widehat{\Omega}_{B'/B}^1 \otimes_{B'} A)_{\{\mathfrak{p}\}}$  un  $A_{\{\mathfrak{p}\}}$ -módulo proyectivo (véase la Proposición 2.3.5), por [EGA IV<sub>1</sub>, (0.19.1.14.(ii))] resulta que el morfismo

$$\left(\frac{I}{I^2}\right)_{\{\mathfrak{p}\}} \rightarrow (\widehat{\Omega}_{B'/B}^1 \otimes_{B'} A)_{\{\mathfrak{p}\}}$$

es inversible a la derecha. Aplicando la equivalencia de categorías 2.1.13.(3) se encuentra  $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{X}$  abierto con  $x \in \mathfrak{U}$  tal que el morfismo

$$\left(\frac{I}{I^2}\right)^{\Delta} \rightarrow \widehat{\Omega}_{\mathbb{D}_{\mathfrak{A}_{\mathfrak{y}}}^s/\mathfrak{y}}^1 \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{D}_{\mathfrak{A}_{\mathfrak{y}}}^s}} \mathcal{O}_{\mathfrak{x}}$$

es inversible a la derecha en  $\mathfrak{U}$ . Ahora bien, por el Criterio jacobiano de Zariski para esquemas formales (Corolario 2.3.12) resulta que  $f$  es liso en  $\mathfrak{U}$ .

(3)  $\Rightarrow$  (4) Por el Lema 2.3.4 se tiene que  $\widehat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{x},x}$  es  $\widehat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{y},y}$ -plano y, por 1.4.2,  $f$  es plano en  $x$ . Además de [EGA IV<sub>1</sub>, (0.19.3.5)] se deduce que  $\widehat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{x},x} \otimes_{\widehat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{y},y}} k(y)$  es una  $k(y)$ -álgebra formalmente lisa para las topologías ádicas o, equivalentemente, por la implicación (3)  $\Rightarrow$  (1)  $f^{-1}(y)$  es un  $k(y)$ -esquema formal liso en  $x$ .

(4)  $\Rightarrow$  (3) Por 1.4.2 se tiene que  $A_{\mathfrak{p}}$  es un  $B_{\mathfrak{r}}$ -módulo plano y, por lo tanto, resulta que

$$0 \rightarrow \frac{I_{\mathfrak{q}}}{\mathfrak{r}I_{\mathfrak{q}}} \rightarrow \frac{B'_{\mathfrak{q}}}{\mathfrak{r}B'_{\mathfrak{q}}} \rightarrow \frac{A_{\mathfrak{p}}}{\mathfrak{r}A_{\mathfrak{p}}} \rightarrow 0 \quad (3.2.4.2)$$

es una sucesión exacta corta. Por otro lado, como  $f^{-1}(y)$  es un  $k(y)$ -esquema formal liso en  $x$ , de la implicación (1)  $\Rightarrow$  (2) se deduce que  $\widehat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{x},x} \otimes_{\widehat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{y},y}} k(y)$  es una  $k(y)$ -álgebra formalmente lisa para las topologías ádicas o, equivalentemente, por el Lema 2.2.7,  $A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{r}A_{\mathfrak{p}}$  es una  $k(\mathfrak{r})$ -álgebra formalmente lisa para las topologías ádicas. Aplicando el Criterio jacobiano de Zariski (Proposición 2.3.11) a la sucesión (3.2.4.2) se tiene que el morfismo

$$\frac{\widehat{I}_{\mathfrak{q}}}{\widehat{I}_{\mathfrak{q}}^2} \otimes_{B_{\mathfrak{r}}} k(\mathfrak{r}) \rightarrow (\widehat{\Omega}_{B'/B}^1)_{\mathfrak{q}} \widehat{\otimes}_{B'_{\mathfrak{q}}} A_{\mathfrak{p}} \otimes_{B_{\mathfrak{r}}} k(\mathfrak{r})$$

es inversible a la derecha. Ahora bien, como  $(\widehat{\Omega}_{B'/B}^1)_{\mathfrak{q}}$  es un  $B'_{\mathfrak{q}}$ -módulo proyectivo (véase la Proposición 2.3.5) por [EGA I, (0.6.7.2)] se obtiene que

$$\frac{\widehat{I}_{\mathfrak{q}}}{\widehat{I}_{\mathfrak{q}}^2} \rightarrow \widehat{\Omega}_{B'_{\mathfrak{q}}/B_{\mathfrak{r}}}^1 \widehat{\otimes}_{B'_{\mathfrak{q}}} \widehat{A}_{\mathfrak{p}}$$

es inversible a la derecha. Entonces, el Criterio jacobiano de Zariski implica que  $A_{\mathfrak{p}}$  es una  $B_{\mathfrak{r}}$ -álgebra formalmente lisa para las topologías ádicas o,

equivalentemente, por el Lema 2.2.7,  $\widehat{A}_{\mathfrak{p}}$  es una  $\widehat{B}_{\mathfrak{r}}$ -álgebra formalmente lisa. □

**COROLARIO 3.2.5.** *Sea  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  un morfismo en Sfn de pseudo tipo finito y consideremos  $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$  y  $\mathcal{K} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$  Ideales de definición tales que  $f^*(\mathcal{K})\mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \subset \mathcal{J}$ . Las siguientes condiciones son equivalentes:*

- (1) *El morfismo  $f$  es liso.*
- (2) *Para todo  $x \in \mathfrak{X}$ ,  $y = f(x)$ ,  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},x}$  es una  $\mathcal{O}_{\mathfrak{Y},y}$ -álgebra formalmente lisa para las topologías ádicas.*
- (3) *Para todo  $x \in \mathfrak{X}$ ,  $y = f(x)$ ,  $\widehat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{X},x}$  es una  $\widehat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{Y},y}$ -álgebra formalmente lisa para las topologías ádicas.*
- (4) *El morfismo  $f$  es plano y  $f^{-1}(y)$  es un  $k(y)$ -esquema formal liso en  $x$ , para todo  $x \in \mathfrak{X}$ ,  $y = f(x)$ .*

**COROLARIO 3.2.6.** *Sea  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  un morfismo en Sfn ádico y  $\mathcal{K} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$  un Ideal de definición. Escribamos  $f = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} f_n$  respecto a los Ideales de definición  $\mathcal{K} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$  y  $\mathcal{J} = f^*(\mathcal{K})\mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ . El morfismo  $f$  es liso si, y sólo si,  $f$  es plano y el morfismo  $X_0 \xrightarrow{f_0} Y_0$  es liso.*

**DEMOSTRACIÓN.** Si  $f$  es ádico, el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{X} & \xrightarrow{f} & \mathfrak{Y} \\ \uparrow & & \uparrow \\ X_0 & \xrightarrow{f_0} & Y_0 \end{array}$$

es un cuadrado cartesiano (Proposición 1.2.5). Si  $f$  es liso, por cambio de base resulta que  $f_0$  es liso. Además por la Proposición 2.3.5 se tiene que  $f$  es plano. Recíprocamente, si  $f$  es ádico por 1.2.10 se tiene que  $f^{-1}(y) = f_0^{-1}(y)$ , para todo  $x \in \mathfrak{X}$ ,  $y = f(x)$ . Y, por lo tanto, como  $f_0$  es liso, por cambio de base resulta que  $f^{-1}(y)$  es un  $k(y)$ -esquema liso en  $x$ , para todo  $x \in \mathfrak{X}$ ,  $y = f(x)$  y, aplicando el Corolario 3.2.5 se concluye que  $f$  es liso. □

El siguiente ejemplo muestra que el resultado anterior en el caso no ádico no se verifica.

**EJEMPLO 3.2.7.** Dado  $K$  un cuerpo, sea  $\mathbb{P}_K^n$  el espacio proyectivo  $n$ -dimensional y  $X \subset \mathbb{P}_K^n$  un subvariedad no lisa sobre  $K$ . Si denotamos por  $(\mathbb{P}_K^n)_X$  la compleción de  $\mathbb{P}_K^n$  a lo largo de  $X$ , por la Proposición 2.2.22 se tiene que el morfismo

$$(\mathbb{P}_K^n)_X \xrightarrow{f} \text{Spec}(K)$$

es liso y, sin embargo,  $X \xrightarrow{f_0} \text{Spec}(K)$  no es liso.



COROLARIO 3.2.8. Dado  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  un morfismo en  $\mathbf{Sfn}$  sean  $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$  y  $\mathcal{K} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$  Ideales de definición tales que  $f^*(\mathcal{K})\mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \subset \mathcal{J}$  y respecto a los cuales  $f = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} f_n$ . Si  $f$  es plano,  $X_0 \xrightarrow{f_0} Y_0$  es un morfismo liso y  $f^{-1}(y) = f_0^{-1}(y)$ , para todo  $x \in \mathfrak{X}$ ,  $y = f(x)$  entonces,  $f$  es liso.

DEMOSTRACIÓN. Como  $f_0$  es liso y  $f^{-1}(y) = f_0^{-1}(y)$  para todo  $x \in \mathfrak{X}$ ,  $y = f(x)$ , se deduce que  $f^{-1}(y)$  es un  $k(y)$ -esquema liso. Además, por hipótesis  $f$  es plano y el Corolario 3.2.5 implica que  $f$  es liso.  $\square$

El Ejemplo 3.2.7 ilustra que el recíproco del corolario anterior no se verifica.

Todo morfismo  $X \xrightarrow{f} Y$  liso en  $\mathbf{Sch}$  es localmente composición de un morfismo étale  $U \rightarrow \mathbb{A}_Y^r$  y de la proyección  $\mathbb{A}_Y^r \rightarrow Y$ . La Proposición 3.2.9 generaliza este hecho para los morfismos lisos en  $\mathbf{Sfn}$ .

PROPOSICIÓN 3.2.9. Sea  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  un morfismo en  $\mathbf{Sfn}$  de pseudo tipo finito. El morfismo  $f$  es liso en  $x \in \mathfrak{X}$  si, y sólo si, existe  $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{X}$  abierto con  $x \in \mathfrak{U}$  tal que  $f|_{\mathfrak{U}}$  se factoriza en

$$\mathfrak{U} \xrightarrow{g} \mathbb{A}_{\mathfrak{Y}}^n \xrightarrow{p} \mathfrak{Y}$$

donde  $g$  es étale,  $p$  es la proyección canónica y  $n = \mathrm{rg}(\widehat{\Omega}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},x}/\mathcal{O}_{\mathfrak{Y},f(x)}}^1)$ .

DEMOSTRACIÓN. Como es una cuestión local, podemos suponer que  $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A) \xrightarrow{f} \mathfrak{Y} = \mathrm{Spf}(B)$  es un morfismo liso en  $\mathbf{Sfn}_{\mathrm{af}}$ . Por la Proposición 2.1.9 y por el Lema 2.3.4 se tiene que  $\widehat{\Omega}_{A/B}^1$  es un  $A$ -módulo proyectivo de tipo finito y, por lo tanto, si  $\mathfrak{p} \subset A$  es el ideal primo correspondiente a  $x$ , existe  $h \in A \setminus \mathfrak{p}$  tal que  $\Gamma(\mathfrak{D}(h), \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^1) = \widehat{\Omega}_{A_{\{h\}}/B}^1$  es un  $A_{\{h\}}$ -módulo libre de tipo finito. Sea  $\mathfrak{U} = \mathrm{Spf}(A_{\{h\}})$ . Dada  $\{\widehat{da}_1, \widehat{da}_2, \dots, \widehat{da}_n\}$  una base de  $\widehat{\Omega}_{A_{\{h\}}/B}^1$  consideremos el morfismo de  $\mathfrak{Y}$ -esquemas formales

$$\mathfrak{U} \xrightarrow{g} \mathbb{A}_{\mathfrak{Y}}^n = \mathrm{Spf}(B\{T_1, T_2, \dots, T_n\})$$

definido a través de la equivalencia de categorías (1.1.10.1) por el morfismo de  $B$ -álgebras continuas

$$\begin{array}{ccc} B\{T_1, T_2, \dots, T_n\} & \rightarrow & A_{\{h\}} \\ T_i & \rightsquigarrow & a_i \end{array}$$

El morfismo  $g$  verifica que  $f|_{\mathfrak{U}} = p \circ g$ . Además, se deduce que  $g^*\widehat{\Omega}_{\mathbb{A}_{\mathfrak{Y}}^n/\mathfrak{Y}}^1 \cong \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^1$  (véase la definición de  $g$ ) y, por el Corolario 2.3.10 se tiene que  $g$  es étale.  $\square$

COROLARIO 3.2.10. Sea  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  un morfismo de liso en  $x \in \mathfrak{X}$  e  $y = f(x)$ . Entonces

$$\dim_x f = \text{rg}(\widehat{\Omega}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},x}/\mathcal{O}_{\mathfrak{Y},y}}^1)$$

DEMOSTRACIÓN. Sea  $n = \text{rg}(\widehat{\Omega}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},x}/\mathcal{O}_{\mathfrak{Y},y}}^1)$ . Por la Proposición 3.2.9 existe  $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{X}$  con  $x \in \mathfrak{U}$  tal que  $f|_{\mathfrak{U}}$  se factoriza en  $\mathfrak{U} \xrightarrow{g} \mathbb{A}_{\mathfrak{Y}}^n \xrightarrow{p} \mathfrak{Y}$  donde  $g$  es un morfismo étale y  $p$  es la proyección canónica. Aplicando la Proposición 2.3.4 se tiene que  $f|_{\mathfrak{U}}$  y  $g$  son morfismos planos y, por lo tanto,

$$\begin{aligned} \dim_x f &= \dim \widehat{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},x}} \otimes_{\widehat{\mathcal{O}_{\mathfrak{Y},y}}} k(y) = \dim \widehat{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},x}} - \dim \widehat{\mathcal{O}_{\mathfrak{Y},y}} \\ \dim_x g &= \dim \widehat{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},x}} \otimes_{\widehat{\mathcal{O}_{\mathbb{A}_{\mathfrak{Y}}^n, g(x)}}} k(g(x)) = \dim \widehat{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},x}} - \dim \widehat{\mathcal{O}_{\mathbb{A}_{\mathfrak{Y}}^n, g(x)}} \end{aligned}$$

Ahora bien, como  $g$  es no ramificado por el Corolario 3.1.8 se tiene que  $\dim_x g = 0$  y, entonces  $\dim_x f = \dim \widehat{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},x}} - \dim \widehat{\mathcal{O}_{\mathfrak{Y},y}} = n$ .  $\square$

PROPOSICIÓN 3.2.11. Sea  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  un morfismo de pseudo tipo finito y  $\mathfrak{X}' \hookrightarrow \mathfrak{X}$  un encaje cerrado dado por el Ideal  $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$  y llamemos  $f' = f|_{\mathfrak{X}'}$ . Si  $f$  es liso en  $x \in \mathfrak{X}'$ ,  $n = \dim_x f$  e  $y = f(x)$  las siguientes condiciones son equivalentes:

- (1) El morfismo  $f'$  es liso en  $x$  y  $\dim_x f'^{-1}(y) = n - m$
- (2)  $En^1 x$

$$0 \rightarrow \frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I}^2} \rightarrow \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^1 \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}'} \rightarrow \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}'/\mathfrak{Y}}^1 \rightarrow 0$$

es una sucesión exacta de  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}$ -Módulos localmente libres de rangos  $m$ ,  $n$ ,  $n - m$ , respectivamente.

DEMOSTRACIÓN. Como  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  es un morfismo liso en  $x$ , cambiando si es necesario  $\mathfrak{X}$  por un entorno más pequeño de  $x$ , podemos suponer que  $\mathfrak{X} = \text{Spf}(A) \xrightarrow{f} \mathfrak{Y} = \text{Spf}(B)$  es un morfismo en  $\text{Sfn}_{\text{af}}$  liso en  $x$  y que  $\mathfrak{X}' = \text{Spf}(A/I)$ . Por lo tanto, aplicando la Proposición 2.3.5 y el Corolario 3.2.10 se tiene que  $\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^1$  es un  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -Módulo localmente libre de rango  $n$ .

Veamos que (1)  $\Rightarrow$  (2). Cambiando, de nuevo, si es necesario  $\mathfrak{X}'$  por un entorno más pequeño de  $x$  podemos suponer que  $\mathfrak{X}' \xrightarrow{f'} \mathfrak{Y}$  es un morfismo liso y, entonces, aplicando la Proposición 2.3.5 y el Corolario 3.2.10, resulta que  $\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}'/\mathfrak{Y}}^1$  es un  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}$ -Módulo localmente libre de rango  $n - m$ . Por otra parte, el Criterio jacobiano de Zariski para esquemas formales (Corolario 2.3.12) implica que la sucesión

$$0 \rightarrow \frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I}^2} \rightarrow \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^1 \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}'} \rightarrow \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}'/\mathfrak{Y}}^1 \rightarrow 0$$

<sup>1</sup>Sea  $(X, \mathcal{O}_X)$  un espacio anillado. Diremos que la sucesión de  $\mathcal{O}_X$ -Módulos

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow 0$$

es exacta en  $x \in X$  si  $0 \rightarrow \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x \rightarrow \mathcal{H}_x \rightarrow 0$  es exacta.

es exacta y escindida, de donde se deduce que  $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2$  es un  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}$ -Módulo localmente libre de rango  $m$ .

Recíprocamente, aplicando [EGA I, (0.5.5.4)] a la Segunda sucesión exacta fundamental (2.1.30.6) asociada a los morfismos  $\mathfrak{X}' \hookrightarrow \mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{X}$ , se deduce que existe  $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{X}'$  abierto con  $x \in \mathfrak{U}$  tal que

$$0 \rightarrow \left(\frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I}^2}\right)|_{\mathfrak{U}} \rightarrow (\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}'/\mathfrak{Y}}^1 \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}'})|_{\mathfrak{U}} \rightarrow (\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}'/\mathfrak{Y}}^1)|_{\mathfrak{U}} \rightarrow 0$$

es exacta y escindida. Por el Criterio jacobiano de Zariski (Corolario 2.3.12) se tiene que  $f'|_{\mathfrak{U}}$  es liso y, por lo tanto,  $f'$  es liso en  $x$ .  $\square$

Localmente un morfismo de pseudo tipo finito  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$ , es de la forma  $\mathfrak{U} \xrightarrow{j} \mathbb{D}_{\mathbb{A}_{\mathfrak{Y}}}^r \xrightarrow{p} \mathfrak{Y}$  donde  $j$  es un encaje cerrado (véase la Propiedad 1.3.2.(1)). En el Corolario 3.2.13 se da un criterio matricial que determina cuando  $\mathfrak{U}$  es liso sobre  $\mathfrak{Y}$ . A continuación establecemos los preliminares necesarios para enunciarlo.

3.2.12. Dado  $\mathfrak{Y} = \text{Spf}(A)$  en  $\text{Sfn}_{\text{af}}$  consideremos  $\mathfrak{X} \subset \mathbb{D}_{\mathbb{A}_{\mathfrak{Y}}}^s$  un subesquema formal cerrado dado por un Ideal  $\mathcal{I} = I^\Delta$  con  $I = \langle g_1, g_2, \dots, g_k \rangle \subset A\{T_1, \dots, T_r\}[[Z_1, \dots, Z_s]]$ . En el Ejemplo 2.1.8 se ha visto que

$$\{\widehat{d}T_1, \widehat{d}T_2, \dots, \widehat{d}T_r, \widehat{d}Z_1, \widehat{d}Z_2, \dots, \widehat{d}Z_s\}$$

es una base de  $\widehat{\Omega}_{A\{\mathbf{T}\}[[\mathbf{Z}]]/A}^1$  y además, que dado  $g \in A\{\mathbf{T}\}[[\mathbf{Z}]]$  se verifica que:

$$\widehat{d}g = \sum_{i=1}^r \frac{\partial g}{\partial T_i} \widehat{d}T_i + \sum_{j=1}^s \frac{\partial g}{\partial Z_j} \widehat{d}Z_j$$

donde  $\widehat{d}$  es la derivación canónica completa de  $A\{\mathbf{T}\}[[\mathbf{Z}]]$  sobre  $A$ . Para cada  $g \in A\{\mathbf{T}\}[[\mathbf{Z}]]$ ,  $s \in \{T_1, \widehat{d}T_2, \dots, \widehat{d}T_r, \widehat{d}Z_1, \widehat{d}Z_2, \dots, \widehat{d}Z_s\}$  y  $x \in \mathfrak{X}$ , denotemos por  $\frac{\partial g}{\partial s}(x)$  la imagen de  $\frac{\partial g}{\partial s} \in A\{\mathbf{T}\}[[\mathbf{Z}]]$  en  $k(x)$ . Llamamos *matriz jacobiana de  $\mathfrak{X}$  sobre  $\mathfrak{Y}$  en  $x$*  a

$$\text{Jac}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial T_1}(x) & \frac{\partial g_1}{\partial T_2}(x) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial Z_1}(x) & \frac{\partial g_1}{\partial Z_2}(x) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial Z_s}(x) \\ \frac{\partial g_2}{\partial T_1}(x) & \frac{\partial g_2}{\partial T_2}(x) & \dots & \frac{\partial g_2}{\partial Z_1}(x) & \frac{\partial g_2}{\partial Z_2}(x) & \dots & \frac{\partial g_2}{\partial Z_s}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_k}{\partial T_1}(x) & \frac{\partial g_k}{\partial T_2}(x) & \dots & \frac{\partial g_k}{\partial Z_1}(x) & \frac{\partial g_k}{\partial Z_2}(x) & \dots & \frac{\partial g_k}{\partial Z_s}(x) \end{pmatrix}$$

Observemos que la matriz anterior depende de los generadores escogidos de  $I$  y, por lo tanto, la notación  $\text{Jac}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}(x)$  no es completamente precisa.

**COROLARIO 3.2.13.** (*Criterio jacobiano para el espacio formal afín y el disco formal afín*). Dado  $\mathfrak{Y} = \text{Spf}(A)$  en  $\text{Sfn}_{\text{af}}$  sea  $\mathfrak{X} \subset \mathbb{D}_{\mathbb{A}_{\mathfrak{Y}}}^s$  un subesquema cerrado dado por un Ideal  $\mathcal{I} = I^\Delta$  con  $I = \langle g_1, g_2, \dots, g_k \rangle \subset A\{T_1, \dots, T_r\}[[Z_1, \dots, Z_s]]$ . Son equivalentes:

- (1) El morfismo  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  es liso en  $x$  y  $\dim_x f = r + s - l$ .  
(2) Existe un conjunto  $\{g_1, \dots, g_l\} \subset \{g_1, g_2, \dots, g_k\}$  tal que  $I_x = \langle g_{1,x}, g_{2,x}, \dots, g_{l,x} \rangle$  y  $\text{rg}(\text{Jac}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}(x)) = l$ .

DEMOSTRACIÓN. Probemos que (1)  $\Rightarrow$  (2). Por la Proposición 3.2.11 se tiene que en  $x$

$$0 \rightarrow \frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I}^2} \rightarrow \widehat{\Omega}_{\mathbb{D}_{\mathbb{A}_{\mathfrak{Y}}}^s / \mathfrak{Y}}^1 \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{D}_{\mathbb{A}_{\mathfrak{Y}}}^s}} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \rightarrow \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^1 \rightarrow 0$$

es una sucesión exacta de  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -Módulos libres de rangos  $l$ ,  $r + s$ ,  $r + s - l$  y, por lo tanto, resulta que en  $x$

$$0 \rightarrow \frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I}^2} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} k(x) \rightarrow \widehat{\Omega}_{\mathbb{D}_{\mathbb{A}_{\mathfrak{Y}}}^s / \mathfrak{Y}}^1 \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{D}_{\mathbb{A}_{\mathfrak{Y}}}^s}} k(x) \rightarrow \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^1 \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} k(x) \rightarrow 0 \quad (3.2.13.3)$$

es una sucesión exacta corta de  $k(x)$ -espacios vectoriales de dimensión  $l$ ,  $r + s$ ,  $r + s - l$ . Con lo cual, existe un conjunto  $\{g_1, g_2, \dots, g_l\} \subset \{g_1, g_2, \dots, g_k\}$  tal que  $\{g_1(x), g_2(x), \dots, g_l(x)\}$  es una base de  $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2 \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} k(x)$  en  $x$  y por el Lema de Nakayama resulta que  $I_x = \langle g_{1,x}, g_{2,x}, \dots, g_{l,x} \rangle$ . Además de la exactitud de la sucesión (3.2.13.3) y de la equivalencia de categorías 2.1.13.(3) se deduce que el conjunto

$$\{\widehat{d}g_1(x), \widehat{d}g_2(x), \dots, \widehat{d}g_l(x)\} \subset \widehat{\Omega}_{A\{\mathbf{T}\}[[\mathbf{Z}]]/A}^1 \otimes_{A\{\mathbf{T}\}[[\mathbf{Z}]]} k(x)$$

es linealmente independiente y, por lo tanto, se tiene que  $\text{rg}(\text{Jac}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}(x)) = l$ .

Recíprocamente, de la Segunda sucesión exacta fundamental (2.1.30.6) asociada a los morfismos  $\mathfrak{X} \hookrightarrow \mathbb{D}_{\mathbb{A}_{\mathfrak{Y}}}^s \rightarrow \mathfrak{Y}$  se deduce la sucesión exacta en  $x$

$$\frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I}^2} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} k(x) \rightarrow \widehat{\Omega}_{\mathbb{D}_{\mathbb{A}_{\mathfrak{Y}}}^s / \mathfrak{Y}}^1 \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{D}_{\mathbb{A}_{\mathfrak{Y}}}^s}} k(x) \rightarrow \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^1 \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} k(x) \rightarrow 0$$

Por otro lado, como  $\text{rg}(\text{Jac}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}(x)) = l$ , se tiene que

$$\{\widehat{d}g_1(x), \widehat{d}g_2(x), \dots, \widehat{d}g_l(x)\} \subset \widehat{\Omega}_{A\{\mathbf{T}\}[[\mathbf{Z}]]/A}^1 \otimes_{A\{\mathbf{T}\}[[\mathbf{Z}]]} k(x)$$

es un conjunto linealmente independiente. Completando este conjunto a una base de  $\widehat{\Omega}_{A\{\mathbf{T}\}[[\mathbf{Z}]]/A}^1 \otimes_{A\{\mathbf{T}\}[[\mathbf{Z}]]} k(x)$ , por el Lema de Nakayama se encuentra  $\mathcal{B} \subset \widehat{\Omega}_{\mathbb{D}_{\mathbb{A}_{\mathfrak{Y}}}^s / \mathfrak{Y}}^1$  una base tal que  $\{\widehat{d}g_1, \widehat{d}g_2, \dots, \widehat{d}g_l\} \subset \mathcal{B}$  y, por lo tanto,  $\{\widehat{d}g_1, \widehat{d}g_2, \dots, \widehat{d}g_l\} \subset \widehat{\Omega}_{A\{\mathbf{T}\}[[\mathbf{Z}]]/A}^1 \otimes_{A\{\mathbf{T}\}[[\mathbf{Z}]]} A\{\mathbf{T}\}[[\mathbf{Z}]]/I$  es un conjunto linealmente independiente en  $x$ , lo que implica que el conjunto  $\{g_{1,x}, g_{2,x}, \dots, g_{l,x}\}$  proporciona una base de  $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2$  en  $x$  y, por la equivalencia de categorías 2.1.13.(3) se tiene que

$$0 \rightarrow \frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I}^2} \rightarrow \widehat{\Omega}_{\mathbb{D}_{\mathbb{A}_{\mathfrak{Y}}}^s / \mathfrak{Y}}^1 \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{D}_{\mathbb{A}_{\mathfrak{Y}}}^s}} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \rightarrow \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^1 \rightarrow 0$$

es una sucesión exacta y escindida en  $x$  de  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -Módulos localmente libres de rangos  $l$ ,  $r + s$ ,  $r + s - l$ . Aplicando la Proposición 3.2.11 resulta que  $f$  es liso en  $x$  y  $\dim_x f = r + s - l$ .  $\square$

Nótese que el Criterio jacobiano para el espacio formal afín y el disco formal afín (Corolario 3.2.13) generaliza el Criterio jacobiano para el espacio afín en Sch ([AK, Ch. VII, Theorem (5.14)]).

El siguiente corolario será utilizado más adelante en el desarrollo de la teoría de deformación de esquemas formales (Capítulo 4).

**COROLARIO 3.2.14.** *Sean  $\mathfrak{Y}' \hookrightarrow \mathfrak{Y}$  un encaje cerrado en Sfn y  $\mathfrak{X}' \xrightarrow{f'} \mathfrak{Y}'$  un morfismo en Sfn liso. Para cada punto  $x \in \mathfrak{X}'$  existe  $\mathfrak{U}' \subset \mathfrak{X}'$  un abierto con  $x \in \mathfrak{U}'$  y un esquema formal localmente noetheriano  $\mathfrak{U}$  liso sobre  $\mathfrak{Y}$  tal que  $\mathfrak{U}' = \mathfrak{U} \times_{\mathfrak{Y}} \mathfrak{Y}'$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Como es una cuestión local podemos suponer que los morfismos  $\mathfrak{Y}' = \text{Spf}(B') \hookrightarrow \mathfrak{Y} = \text{Spf}(B)$  y  $\mathfrak{X}' = \text{Spf}(A') \xrightarrow{f'} \mathfrak{Y}' = \text{Spf}(B')$  están en  $\text{Sfn}_{\text{af}}$  y que existen  $r, s \in \mathbb{N}$  tales que, si escribimos  $B'\{\mathbf{T}\}[[\mathbf{Z}]] := B'\{T_1, \dots, T_r\}[[Z_1, \dots, Z_s]]$ , el morfismo  $f'$  se factoriza en

$$\mathfrak{X}' = \text{Spf}(A') \hookrightarrow \mathbb{D}_{\mathbb{A}_{\mathfrak{Y}'}}^s = \text{Spf}(B'\{\mathbf{T}\}[[\mathbf{Z}]]) \xrightarrow{p'} \mathfrak{Y}' = \text{Spf}(B')$$

donde  $\mathfrak{X}' \hookrightarrow \mathbb{D}_{\mathbb{A}_{\mathfrak{Y}'}}^s$  es un subesquema cerrado dado por un Ideal  $I' = (I')^\Delta \subset \mathcal{O}_{\mathbb{D}_{\mathbb{A}_{\mathfrak{Y}'}}^s}$  con  $I' \subset B'\{\mathbf{T}\}[[\mathbf{Z}]]$  un ideal y  $p'$  la proyección canónica (véase la Propiedad 1.3.2.(1)). Fijemos  $x \in \mathfrak{X}'$ . Como  $f'$  es liso, por el Criterio jacobiano para el espacio formal afín y el disco formal afín (Corolario 3.2.13), se tiene que existe  $\{g'_1, g'_2, \dots, g'_l\} \subset I'$  tal que:

$$\langle g'_{1,x}, g'_{2,x}, \dots, g'_{l,x} \rangle = I'_x \quad \text{y} \quad \text{rg Jac}_{\mathfrak{X}'/\mathfrak{Y}'}(x) = l \quad (3.2.14.4)$$

Reemplazando, si es necesario,  $\mathfrak{X}'$  por un entorno abierto afín más pequeño de  $x$  podemos suponer que  $I' = \langle g'_1, g'_2, \dots, g'_l \rangle$ . Sea  $\{g_1, g_2, \dots, g_l\} \subset B\{\mathbf{T}\}[[\mathbf{Z}]]$  tal que  $g_i \in B\{\mathbf{T}\}[[\mathbf{Z}]] \rightsquigarrow g'_i \in B'\{\mathbf{T}\}[[\mathbf{Z}]]$  a través del homomorfismo continuo de anillos  $B\{\mathbf{T}\}[[\mathbf{Z}]] \rightarrow B'\{\mathbf{T}\}[[\mathbf{Z}]]$  inducido por  $B \rightarrow B'$ . Llamemos  $I := \langle g_1, g_2, \dots, g_l \rangle \subset B\{\mathbf{T}\}[[\mathbf{Z}]]$  y  $\mathfrak{X} := \text{Spf}(B\{\mathbf{T}\}[[\mathbf{Z}]]/I)$ . Se verifica que  $\mathfrak{X}' \subset \mathfrak{X}$  es un subesquema cerrado y que en el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} \mathfrak{X} & \hookrightarrow & \mathbb{D}_{\mathbb{A}_{\mathfrak{Y}}}^s & \xrightarrow{p} & \mathfrak{Y} \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \mathfrak{X}' & \hookrightarrow & \mathbb{D}_{\mathbb{A}_{\mathfrak{Y}'}}^s & \xrightarrow{p'} & \mathfrak{Y}' \end{array}$$

los cuadrados son cartesianos. De (3.2.14.4) se deduce que  $\text{rg Jac}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}(x) = l$  y aplicando el Criterio jacobiano para el espacio formal afín y el disco formal afín, resulta que  $\mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$  es liso en  $x \in \mathfrak{X}$ . Para finalizar la prueba basta tomar  $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{X}$  un entorno abierto de  $x \in \mathfrak{X}$  tal que el morfismo  $\mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{Y}$  es liso y  $\mathfrak{U}'$  el abierto correspondiente en  $\mathfrak{X}'$ .

□

### 3.3. Morfismos étales

La mayor parte de los resultados de esta sección son consecuencia de los obtenidos en las Secciones 3.1 y 3.2. Estos resultados nos permitirán caracterizar en la Sección 3.4 dos clases importantes de morfismos étales: los morfismos de compleción y los encajes abiertos.

**PROPOSICIÓN 3.3.1.** *Dado  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  en Sfn sean  $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$  y  $\mathcal{K} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$  Ideales de definición con  $f^*(\mathcal{K})\mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \subset \mathcal{J}$  respecto a los cuales  $f = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} f_n$ .*

*Si  $X_n \xrightarrow{f_n} Y_n$  es étale,  $\forall n \in \mathbb{N}$  entonces  $f$  es étale.*

**DEMOSTRACIÓN.** Es consecuencia de los resultados análogos para los morfismos no ramificados y lisos (Proposición 3.1.1 y Proposición 3.2.1).  $\square$

**COROLARIO 3.3.2.** *Sea  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  un morfismo en Sfn ádico y  $\mathcal{K} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$  un Ideal de definición. Consideremos  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  el sistema directo de morfismos de esquemas determinados por los Ideales de definición  $\mathcal{K} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$  y  $\mathcal{J} = f^*(\mathcal{K})\mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ . El morfismo  $f$  es étale si, y sólo si, dado  $\mathcal{J} = f^*(\mathcal{K})\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$  los morfismos  $X_n \xrightarrow{f_n} Y_n$  son étales,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Es consecuencia de los resultados análogos para los morfismos no ramificados y lisos (Proposición 3.1.1 y Corolario 3.2.2).  $\square$

**PROPOSICIÓN 3.3.3.** *Sea  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  un morfismo en Sfn ádico y  $\mathcal{K} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$  un Ideal de definición respecto al cual  $f = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} f_n$ . El morfismo  $f$  es étale*

*si, y sólo si, es plano y dado  $\mathcal{J} = f^*(\mathcal{K})\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$  el morfismo  $X_0 \xrightarrow{f_0} Y_0$  es étale.*

**DEMOSTRACIÓN.** Se deduce de los resultados análogos para los morfismos no ramificados y lisos (Proposición 3.1.3 y Corolario 3.2.6).  $\square$

El siguiente ejemplo demuestra que en el caso no ádico los dos resultados anteriores no se verifican y que, además, en general, el recíproco de la Proposición 3.3.1 no se cumple.

**EJEMPLO 3.3.4.** Dado  $K$  un cuerpo consideremos el morfismo de compleción de  $\mathbb{A}_K^1$  a lo largo de  $V(\langle T \rangle)$ :

$$\mathbb{D}_K^1 = \mathrm{Spf}(K[[T]]) \xrightarrow{\kappa} \mathbb{A}_K^1 = \mathrm{Spec}(K[T])$$

Por la Proposición 2.2.21 se tiene que  $\kappa$  es étale y, sin embargo, los morfismos  $\mathrm{Spec}(K[T]/\langle T \rangle^{n+1}) \xrightarrow{\kappa_n} \mathbb{A}_K^1$  no son étales, para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

**PROPOSICIÓN 3.3.5.** *Sea  $f$  un morfismo en Sfn de pseudo tipo finito y sean  $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$  y  $\mathcal{K} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$  Ideales de definición tales que  $f^*(\mathcal{K})\mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \subset \mathcal{J}$  y respecto a los cuales  $f = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} f_n$ . Si  $X_0 \xrightarrow{f_0} Y_0$  es étale,  $f$  es plano y*

*$f^{-1}(y) = f_0^{-1}(y)$ , para todo  $y = f(x)$ ,  $x \in \mathfrak{X}$  entonces  $f$  es étale.*

DEMOSTRACIÓN. Es consecuencia del Corolario 3.1.10 y del Corolario 3.2.8.  $\square$

El Ejemplo 3.3.4 muestra que el recíproco del resultado anterior no se verifica.

En la Proposición 3.3.6 se caracterizan localmente los morfismos étales.

PROPOSICIÓN 3.3.6. *Dado  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  un morfismo en Sfn de pseudo tipo finito, sean  $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$  y  $\mathcal{K} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$  Ideales de definición tales que  $f^*(\mathcal{K})\mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \subset \mathcal{J}$ . Dado  $x \in \mathfrak{X}$  e  $y = f(x)$  las siguientes condiciones son equivalentes:*

- (1)  $f$  es étale en  $x$ .
- (2)  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},x}$  es una  $\mathcal{O}_{\mathfrak{Y},y}$ -álgebra formalmente étale para las topologías ádicas.
- (2')  $\widehat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{X},x}$  es una  $\widehat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{Y},y}$ -álgebra formalmente étale para las topologías ádicas.
- (3)  $f$  es plano en  $x$  y  $f^{-1}(y)$  es un  $k(y)$ -esquema formal étale en  $x$ .
- (4)  $f$  es plano y no ramificado en  $x$ .
- (4')  $f$  es plano en  $x$  y  $(\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^1)_x = 0$ .
- (5)  $f$  es liso en  $x$  y un cuasirevestimiento en  $x$ .

DEMOSTRACIÓN. Aplicando la Proposición 3.1.5 y la Proposición 3.2.4 se tienen las siguientes implicaciones:

- (1)  $\Leftrightarrow$  (2)  $\Leftrightarrow$  (2')  $\Leftrightarrow$  (3)  $\Rightarrow$  (4)  $\Leftrightarrow$  (4')  
 (1)  $\Rightarrow$  (5)

Veamos que (4)  $\Rightarrow$  (5). Por el Corolario 3.1.7 basta comprobar que  $f$  es liso en  $x$ . Ahora bien, por hipótesis, se tiene que  $f$  es no ramificado en  $x$  y, por la Proposición 3.1.5, resulta que  $\widehat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{X},x} \otimes_{\widehat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{Y},y}} k(y) = k(x)$  y  $k(x)|k(y)$  es una extensión finita y separable, por lo tanto, formalmente étale. Como  $f$  es plano en  $x$ , por la Proposición 3.2.4 se concluye que  $f$  es liso en  $x$ .

Por último demostremos que (5)  $\Rightarrow$  (1). Para ello, es suficiente comprobar que  $f$  es no ramificado en  $x$  o, equivalentemente por la Proposición 3.1.5, que  $\widehat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{X},x} \otimes_{\widehat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{Y},y}} k(y) = k(x)$  y que  $k(x)|k(y)$  es una extensión finita y separable. Como  $f$  es liso en  $x$  aplicando la Proposición 3.2.4 se tiene que  $\widehat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{X},x}$  es una  $\widehat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{X},x}$ -álgebra formalmente lisa para las topologías ádicas y, por cambio de base resulta que  $\widehat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{X},x} \otimes_{\widehat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{Y},y}} k(y)$  es una  $k(y)$ -álgebra formalmente lisa. Entonces por la Propiedad 2.2.6 se tiene que  $\widehat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{X},x} \otimes_{\widehat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{Y},y}} k(y)$  es una  $k(y)$ -álgebra formalmente lisa para las topologías dadas por los ideales maximales y aplicando [Ma, Lemma1, p. 216] resulta que  $\widehat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{X},x} \otimes_{\widehat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{Y},y}} k(y)$  es un anillo local regular. Además, por hipótesis se verifica que  $\widehat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{X},x} \otimes_{\widehat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{Y},y}} k(y)$  es un  $k(y)$ -módulo finito, por lo tanto, artiniano, con lo cual necesariamente  $\widehat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{X},x} \otimes_{\widehat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{Y},y}} k(y) = k(x)$ . Por último, como  $k(x) = \widehat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{X},x} \otimes_{\widehat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{Y},y}} k(y)$  es una  $k(y)$ -álgebra formalmente lisa se tiene que  $k(x)|k(y)$  es una extensión separable (cf. [EGA IV<sub>1</sub>, (0.19.6.3)]).  $\square$

COROLARIO 3.3.7. Sea  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  un morfismo en  $\mathbf{Sfn}$  de pseudo tipo finito y sean  $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$  y  $\mathcal{K} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$  Ideales de definición tales que  $f^*(\mathcal{K})\mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \subset \mathcal{J}$ . Las siguientes condiciones son equivalentes:

- (1)  $f$  es étale.
- (2) Para todo  $x \in \mathfrak{X}$ ,  $y = f(x)$ ,  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},x}$  es una  $\mathcal{O}_{\mathfrak{Y},y}$ -álgebra formalmente étale para las topologías ádicas.
- (2') Para todo  $x \in \mathfrak{X}$ ,  $y = f(x)$ ,  $\widehat{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},x}}$  es una  $\widehat{\mathcal{O}_{\mathfrak{Y},y}}$ -álgebra formalmente étale para las topologías ádicas.
- (3) Para todo  $x \in \mathfrak{X}$ ,  $y = f(x)$ ,  $f^{-1}(y)$  es un  $k(y)$ -esquema formal étale en  $x$  y  $f$  es plano.
- (4)  $f$  es plano y no ramificado.
- (4')  $f$  es plano y  $\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^1 = 0$ .
- (5)  $f$  es liso y un cuasirevestimiento.

En  $\mathbf{Sch}$  un morfismo es étale si, y sólo si, es liso y cuasifinito. En el siguiente ejemplo se muestra que en  $\mathbf{Sfn}$  un morfismo liso y pseudo cuasifinito no es étale. Se justifica así la definición de los cuasirevestimientos en  $\mathbf{Sfn}$  como la generalización de los morfismos cuasifinitos en  $\mathbf{Sch}$  (véase la Definición 1.3.7).

EJEMPLO 3.3.8. Dado  $K$  un cuerpo, el morfismo canónico de proyección  $\mathbb{D}_K^1 \rightarrow \text{Spec}(K)$  es liso, pseudo cuasifinito y, sin embargo, no es étale.

### 3.4. Propiedades especiales de los morfismos étales

En esta parte se caracterizan dos tipos importantes de morfismos étales: los encajes abiertos y los morfismos de completación. Estos últimos son fundamentales en los teoremas de estructura de las condiciones infinitesimales (Sección 3.5). Otro resultado esencial para los teoremas de estructura es el Teorema 3.4.5 en el que se establece una equivalencia de categorías entre los  $\mathfrak{Y}$ -esquemas formales étales ádicos y los  $Y_0$ -esquemas étales para un esquema formal localmente noetheriano  $\mathfrak{Y} = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} Y_n$ .

Los dos resultados siguientes serán claves para la demostración de los restantes resultados de esta capítulo.

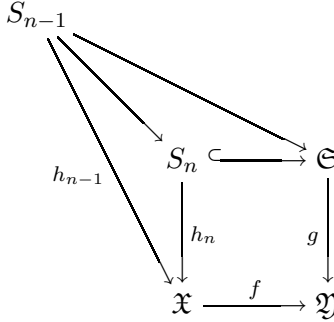
PROPOSICIÓN 3.4.1. Dado  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  un morfismo formalmente étale en  $\mathbf{Sfn}$ , sean  $\mathfrak{S}$  un  $\mathfrak{Y}$ -esquema formal en  $\mathbf{Sfn}$  y  $\mathcal{L} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{S}}$  un Ideal de definición tal que  $\mathfrak{S} = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} S_n$ . Si  $S_0 \xrightarrow{h_0} \mathfrak{X}$  es un morfismo en  $\mathbf{Sfn}$  que hace conmutativo el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} S_0 & \hookrightarrow & \mathfrak{S} \\ h_0 \downarrow & & \downarrow g \\ \mathfrak{X} & \xrightarrow{f} & \mathfrak{Y} \end{array},$$

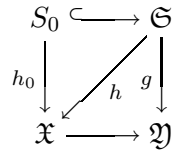


donde  $S_0 \hookrightarrow \mathfrak{S}$  es el encaje cerrado canónico, entonces existe un único  $\mathfrak{Y}$ -morfismo  $\mathfrak{S} \xrightarrow{h} \mathfrak{X}$  en  $\text{Sfn}$  tal que  $h|_{S_0} = h_0$ .

DEMOSTRACIÓN. Por inducción en  $n$  vamos a construir una colección de morfismos  $\{S_n \xrightarrow{h_n} \mathfrak{X}\}_{n \in \mathbb{N}}$  tales que, los diagramas:



son conmutativos. Para  $n = 1$ , por 2.2.3 existe un único morfismo  $S_1 \xrightarrow{h_1} \mathfrak{X}$  tal que  $h_1|_{S_0} = h_0$  y  $g|_{S_1} = f \circ h_1$ . Sea  $n \in \mathbb{N}$  y supongamos construidos para todo  $0 < k < n$  morfismos  $S_k \xrightarrow{h_k} \mathfrak{X}$  tales que  $h_k|_{S_{k-1}} = h_{k-1}$  y  $g|_{S_k} = f \circ h_k$ . Por 2.2.3 existe un único morfismo  $S_n \xrightarrow{h_n} \mathfrak{X}$  tal que  $h_n|_{S_{n-1}} = h_{n-1}$  y  $g|_{S_n} = f \circ h_n$ . El morfismo  $h := \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} h_n$  es trivialmente un morfismo de esquemas formales y es el único que hace el diagrama

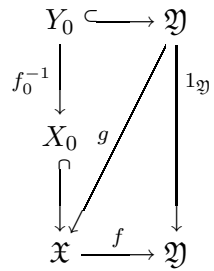


conmutativo. □

OBSERVACIÓN. El resultado anterior es cierto si  $f$  es un morfismo en  $\text{Sfn}$  formalmente liso y  $\mathfrak{S}$  está en  $\text{Sfn}$ .

COROLARIO 3.4.2. Sea  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  un morfismo étale en  $\text{Sfn}$  y sean  $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$  y  $\mathcal{K} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$  Ideales de definición con  $f^*(\mathcal{K})\mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \subset \mathcal{J}$  tales que  $X_0 \xrightarrow{f_0} Y_0$  es un isomorfismo. Entonces  $f$  es un isomorfismo.

DEMOSTRACIÓN. Por la Proposición 3.4.1 existe un único morfismo  $\mathfrak{Y} \xrightarrow{g} \mathfrak{X}$  tal que el siguiente diagrama es conmutativo



Entonces, por el Corolario 2.2.16 se verifica que  $g$  es un morfismo étale. Con lo cual, aplicando la Proposición 3.4.1 se tiene que existe un único morfismo  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f'} \mathfrak{Y}$  tal que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 X_0 & \hookrightarrow & \mathfrak{X} \\
 f_0 \downarrow & & \downarrow 1_{\mathfrak{X}} \\
 Y_0 & \xrightarrow{f'} & \mathfrak{X} \\
 \cap \downarrow & & \downarrow \\
 \mathfrak{Y} & \xrightarrow{g} & \mathfrak{X}
 \end{array}$$

necesariamente,  $f = f'$  y  $f$  es un isomorfismo.  $\square$

En  $\text{Sch}$  se caracterizan los encajes abiertos como aquellos morfismos étales que son radicales. En el siguiente teorema se extiende esta caracterización y se relacionan los encajes abiertos en esquemas formales (véase la Definición 1.2.24) y en esquemas.

**TEOREMA 3.4.3.** *Sea  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  un morfismo en  $\text{Sfn}$ . Las siguientes condiciones son equivalentes:*

- (1)  $f$  es un encaje abierto.
- (2)  $f$  es ádico, plano y, si  $\mathcal{K} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$  un Ideal de definición y  $\mathcal{J} = f^*(\mathcal{K})\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ , el morfismo de esquemas asociado  $X_0 \xrightarrow{f_0} Y_0$  es un encaje abierto.
- (3)  $f$  es étale ádico y radical.
- (4) Existen  $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$  y  $\mathcal{K} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$  Ideales de definición con  $f^*(\mathcal{K})\mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \subset \mathcal{J}$  tales que los morfismos  $X_n \xrightarrow{f_n} Y_n$  son encajes abiertos, para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

**DEMOSTRACIÓN.** La implicación (1)  $\Rightarrow$  (2) se deduce de 1.4.4.(1). Dado  $\mathcal{K} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$  un Ideal de definición, supongamos que se verifica (2) y veamos que se tiene (3). Como  $f_0$  es un encaje abierto, es un morfismo radical y por tanto  $f$  es radical (véase la Definición 1.2.25). Por otro lado,  $f_0$  es un morfismo étale y entonces, por la Proposición 3.3.3 se tiene que  $f$  es étale. Probemos que (3)  $\Rightarrow$  (4). Dado  $\mathcal{K} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$  un Ideal de definición y  $\mathcal{J} = f^*(\mathcal{K})\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ , por el Corolario 3.3.2 se tiene que los morfismos  $X_n \xrightarrow{f_n} Y_n$  son étales, para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Los morfismos  $f_n$  son radicales para todo  $n \in \mathbb{N}$  (véase la Definición 1.2.25) y entonces por [EGA IV<sub>4</sub>, (17.9.1)] resulta que  $f_n$  es un encaje abierto, para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Por último, supongamos que se tiene (4) y demostremos (1). Con las notaciones de (4), existe  $U_0 \subset Y_0$  abierto tal que  $f_0$  se factoriza en

$$X_0 \xrightarrow{f'_0} U_0 \xrightarrow{i_0} Y_0$$

donde  $f'_0$  es un isomorfismo e  $i_0$  es la inclusión canónica. Sea  $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{Y}$  el subesquema formal abierto con espacio topológico subyacente  $U_0$ . El encaje abierto  $\mathfrak{U} \xrightarrow{i} \mathfrak{Y}$  es étale, entonces la Proposición 3.4.1 implica que existe un morfismo  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f'} \mathfrak{U}$  en  $\text{Sfn}$  tal que el diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathfrak{X} & \xrightarrow{f} & \mathfrak{Y} \\
 \searrow f' & & \nearrow i \\
 & \mathfrak{U} & \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 X_0 & \xrightarrow{f_0} & Y_0 \\
 \searrow f'_0 & & \nearrow i_0 \\
 & U_0 &
 \end{array}$$

es conmutativo. Por otro lado, como los morfismos  $f_n$  son étales, para todo  $n \in \mathbb{N}$ , la Proposición 3.3.1 implica que  $f$  es étale. Entonces por el Corolario 2.2.15 se tiene que  $f'$  es étale y, aplicando el Corolario 3.4.2,  $f'$  es un isomorfismo y, por lo tanto,  $f$  es un encaje abierto.  $\square$

En la Proposición 1.4.11 se ha visto que todo morfismo de completión es un pseudo encaje cerrado plano. En el criterio que se enuncia a continuación se prueba que esta condición también es suficiente. De este modo, se caracterizan los morfismos de completión y, por lo tanto, se determina cuando un  $\mathfrak{Y}$ -esquema formal  $\mathfrak{X}$  es la completión de  $\mathfrak{Y}$  a lo largo de un subesquema formal cerrado. Los morfismos de completión jugarán un papel importante en los teoremas de estructura de los morfismos no ramificados, de los morfismos étales y de los morfismos lisos (Teorema 3.5.1, Teorema 3.5.2 y Teorema 3.5.3).

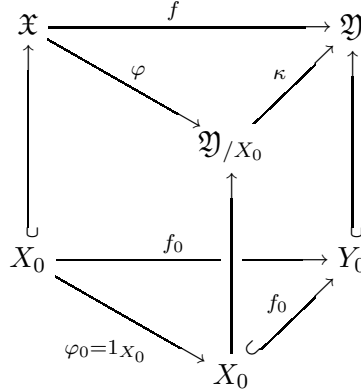
**TEOREMA 3.4.4.** *Dado  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  en  $\text{Sfn}$  sean  $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$  y  $\mathcal{K} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$  Ideales de definición tales que  $f^*(\mathcal{K})\mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \subset \mathcal{J}$ . Las siguientes condiciones son equivalentes:*

- (1) *Existe  $\mathfrak{Y}' \subset \mathfrak{Y}$  un subesquema formal cerrado tal que  $f$  es el morfismo de completión de  $\mathfrak{Y}$  a lo largo de  $\mathfrak{Y}'$  y, por lo tanto,  $\mathfrak{X} = \mathfrak{Y}_{/\mathfrak{Y}'}$ .*
- (2) *El morfismo  $f$  es un pseudo encaje cerrado plano.*
- (3) *El morfismo  $f$  es étale y  $X_0 \xrightarrow{f_0} Y_0$  es un encaje cerrado.*
- (4) *El morfismo  $f$  es un pseudo encaje cerrado liso.*

**DEMOSTRACIÓN.**

La implicación (1)  $\Rightarrow$  (2) es la Proposición 1.4.11. Veamos que (2)  $\Rightarrow$  (3). Como  $f$  es un pseudo encaje cerrado, por el Corolario 3.1.13 se tiene que  $f$  es no ramificado. Entonces como  $f$  es plano, el Corolario 3.3.7 implica

que  $f$  es étale. La equivalencia (3)  $\Leftrightarrow$  (4) es consecuencia del Corolario 3.1.13. Por último, demostremos que (3)  $\Rightarrow$  (1). Por hipótesis el morfismo  $X_0 \xrightarrow{f_0} \mathfrak{Y}$  es un encaje cerrado. Consideremos  $\mathfrak{Y}/_{X_0} \xrightarrow{\kappa} \mathfrak{Y}$  el morfismo de completión de  $\mathfrak{Y}$  a lo largo de  $X_0$  y veamos que  $\mathfrak{X}$  e  $\mathfrak{Y}/_{X_0}$  son  $\mathfrak{Y}$ -isomorfos. Por la Proposición 2.2.22 el morfismo  $\kappa$  es étale y, entonces aplicando la Proposición 3.4.1 se tiene que existe un  $\mathfrak{Y}$ -morfismo  $\mathfrak{X} \xrightarrow{\varphi} \mathfrak{Y}/_{X_0}$  tal que el siguiente diagrama es conmutativo



De la Proposición 2.2.15 resulta que  $\varphi$  es étale y entonces por el Corolario 3.4.2 se tiene que  $\varphi$  es un isomorfismo. □

OBSERVACIÓN. En la implicación (3)  $\Rightarrow$  (1) se ha probado que dado  $\mathfrak{Y}$  en  $\text{Sfn}$ ,  $\mathfrak{Y}' \subset \mathfrak{Y}$  un subesquema formal cerrado definido por el Ideal  $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$ ,  $\mathcal{K} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$  un Ideal de definición de  $\mathfrak{Y}$  y  $n \in \mathbb{N}$  se verifica que

$$\mathfrak{Y}/_{\mathfrak{Y}'} = \mathfrak{Y}/_{Y'_0}$$

siendo  $Y'_0 = (\mathfrak{Y}', \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}/(\mathcal{I} + \mathcal{K}^{n+1}))$ .

Dado  $Y$  un esquema étale e  $Y_0 \subset Y$  un subesquema cerrado con el mismo espacio topológico subyacente, el funtor  $X \rightsquigarrow X \times_Y Y_0$  define una equivalencia entre la categoría de los  $Y$ -esquemas étales y la categoría de los  $Y_0$ -esquemas étales (véase [EGA IV<sub>4</sub>, (18.1.2)]). En el siguiente teorema se extiende esta equivalencia a la categoría de esquemas formales localmente noetherianos.

TEOREMA 3.4.5. *Sea  $\mathfrak{Y}$  en  $\text{Sfn}$  y  $\mathcal{K} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$  un Ideal de definición respecto al cual  $\mathfrak{Y} = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} Y_n$ . Entonces el funtor*

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{Y}\text{-esquemas formales étales ádicos} & \xrightarrow{F} & Y_0\text{-esquemas étales} \\ \mathfrak{X} & \rightsquigarrow & \mathfrak{X} \times_{\mathfrak{Y}} Y_0 \end{array}$$

*es una equivalencia de categorías.*

DEMOSTRACIÓN. Por [McL, IV, §4, Theorem 1] basta probar que: a)  $F$  es pleno y fiel; b) dado  $X_0$  un  $Y_0$ -esquema étale existe  $\mathfrak{X}$  un  $\mathfrak{Y}$ -esquema formal étale ádico tal que  $F(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X} \times_{\mathfrak{Y}} Y_0 \cong X_0$ .

La afirmación a) es consecuencia inmediata de la Proposición 3.4.1.

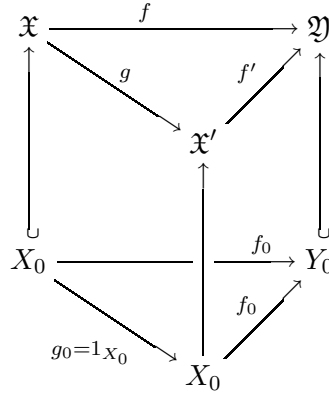
Veamos b). Dado  $X_0$  un  $Y_0$ -esquema étale en  $\text{Sch}$  por [EGA IV<sub>4</sub>, (18.1.2)] existe  $X_1$  un  $Y_1$ -esquema étale localmente noetheriano tal que  $X_1 \times_{Y_1} Y_0 \cong X_0$ . Razonando por inducción en  $n \in \mathbb{N}$  y usando [EGA IV<sub>4</sub>, loc. cit.], se consigue una familia  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tal que, para cada  $n \in \mathbb{N}$   $X_n$  es un  $Y_n$ -esquema étale localmente noetheriano y  $X_n \times_{Y_n} Y_{n-1} \cong X_{n-1}$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Entonces  $\mathfrak{X} := \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} X_n$  es un esquema formal localmente noethe-

riano  $\mathfrak{Y}$ -ádico (por [EGA I, (10.12.3.1)]),  $\mathfrak{X} \times_{\mathfrak{Y}} Y_0 \stackrel{1.1.21}{=} \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} (X_n \times_{Y_n} Y_0) =$

$X_0$  y  $\mathfrak{X}$  es un  $\mathfrak{Y}$ -esquema formal étale (véase la Proposición 3.3.1).  $\square$

COROLARIO 3.4.6. *Sea  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  un morfismo en  $\text{Sfn}$  étale. Dados  $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ , y  $\mathcal{K} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$  Ideales de definición tales que  $f^*(\mathcal{K})\mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \subset \mathcal{J}$ . Si el morfismo inducido  $X_0 \xrightarrow{f_0} Y_0$  es étale, entonces  $f$  es étale ádico.*

DEMOSTRACIÓN. Por el Teorema 3.4.5 existe un morfismo  $\mathfrak{X}' \xrightarrow{f'} \mathfrak{Y}$  en  $\text{Sfn}$  étale ádico tal que  $\mathfrak{X}' \times_{\mathfrak{Y}} Y_0 = X_0$ . Entonces por la Proposición 3.4.1 existe un morfismo  $\mathfrak{X} \xrightarrow{g} \mathfrak{X}'$  en  $\text{Sfn}$  tal que el diagrama



es conmutativo. Aplicando la Proposición 2.2.15 se tiene que  $g$  es étale y, del Corolario 3.4.2 se deduce que  $g$  es un isomorfismo y, por lo tanto,  $f$  es étale ádico.  $\square$

COROLARIO 3.4.7. *Sea  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  un morfismo en  $\text{Sfn}$ . El morfismo  $f$  es étale ádico si, y sólo si, existen  $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$  y  $\mathcal{K} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$  Ideales de definición con  $f^*(\mathcal{K})\mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \subset \mathcal{J}$  de forma que los morfismos inducidos  $X_n \xrightarrow{f_n} Y_n$  son étales, para todo  $n \in \mathbb{N}$ .*

DEMOSTRACIÓN. Si  $f$  es étale ádico dado  $\mathcal{K} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$  un Ideal de definición y  $\mathcal{J} = f^*(\mathcal{K})\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$  (que es un Ideal de definición de  $\mathfrak{X}$  por ser  $f$  ádico) por

cambio de base se tiene que los morfismos  $X_n \xrightarrow{f_n} Y_n$  son étales, para todo  $n \in \mathbb{N}$ . El recíproco es consecuencia de la Proposición 3.3.1 y del corolario anterior.  $\square$

El Teorema 3.4.5 dice que dado  $\mathfrak{Y} = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} Y_n$  en  $\text{Sfn}$  y  $X_0$  un  $Y_0$ -esquema étale existe un único (salvo isomorfismo)  $\mathfrak{Y}$ -esquema formal  $\mathfrak{X}$  étale tal que  $\mathfrak{X} \times_{\mathfrak{Y}} Y_0 = X_0$ . Pero, ¿qué ocurre cuando  $X_0$  es un  $Y_0$ -esquema liso?

**PROPOSICIÓN 3.4.8.** *Sea  $\mathfrak{Y}$  en  $\text{Sfn}$  y  $\mathcal{K} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$  un Ideal de definición respecto al cual  $\mathfrak{Y} = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} Y_n$ . Dado  $X_0 \xrightarrow{f_0} Y_0$  un morfismo en  $\text{Sch}$  liso en  $x \in X_0$ , existe un abierto  $U_0 \subset X_0$ ,  $x \in U_0$  y un  $\mathfrak{Y}$ -esquema formal  $\mathfrak{U}$  liso ádico tal que  $\mathfrak{U} \times_{\mathfrak{Y}} Y_0 \cong U_0$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Como es una cuestión local en  $\mathfrak{Y}$ , podemos suponer que  $\mathfrak{Y} = \text{Spf}(B)$  está en  $\text{Sfn}_{\text{af}}$ ,  $\mathcal{K} = K^\Delta$  con  $K \subset B$  un ideal de definición de  $B$ ,  $B_0 = B/K$  y que  $X_0 = \text{Spec}(A_0) \xrightarrow{f_0} Y_0 = \text{Spec}(B_0)$  es un morfismo en  $\text{Sch}_{\text{af}}$  liso en  $x \in X_0$ . Por la Proposición 3.2.9 existe  $U_0 \subset X_0$  abierto con  $x \in U_0$  tal que  $f_0|_{U_0}$  se factoriza en

$$U_0 \xrightarrow{f'_0} \mathbb{A}_{Y_0}^n = \text{Spec}(B_0[\mathbf{T}]) \xrightarrow{p_0} Y_0$$

donde  $f'_0$  es un morfismo étale y  $p_0$  es la proyección canónica. El morfismo  $p_0$  se levanta al morfismo de proyección  $\mathbb{A}_{\mathfrak{Y}}^n = \text{Spf}(B\{\mathbf{T}\}) \xrightarrow{p} \mathfrak{Y}$  de modo que el siguiente diagrama es cartesiano

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}_{\mathfrak{Y}}^n & \xrightarrow{p} & \mathfrak{Y} \\ \uparrow & & \uparrow \\ U_0 & \xrightarrow{f'_0} \mathbb{A}_{Y_0}^n \xrightarrow{p_0} & Y_0 \end{array}$$

Aplicando el Teorema 3.4.5, existe  $\mathfrak{U}$  un  $\mathbb{A}_{\mathfrak{Y}}^n$ -esquema formal localmente noetheriano étale ádico tal que  $U_0 \cong \mathfrak{U} \times_{\mathbb{A}_{Y_0}^n} \mathbb{A}_{Y_0}^n$ . Entonces  $\mathfrak{U}$  es un  $\mathfrak{Y}$ -esquema formal liso ádico tal que  $U_0 \cong \mathfrak{U} \times_{\mathfrak{Y}} Y_0$ .  $\square$

### 3.5. Teoremas de estructura para las condiciones infinitesimales

En las secciones anteriores hemos visto que las condiciones infinitesimales de un morfismo  $\varinjlim_{n \in \mathbb{N}} f_n$  en  $\text{Sfn}$  ádico están determinadas por el morfismo

$f_0$  (véase las Proposiciones 3.1.3 y 3.3.3 y el Corolario 3.2.6). Sin embargo, los ejemplos 3.1.4 y 3.3.4 ilustran que, en ausencia de la hipótesis ádica no se tiene esta correspondencia. En esta sección se prueban los resultados principales de este capítulo (Teorema 3.5.1, Teorema 3.5.2 y Teorema 3.5.3) en los que se da una descripción local de las condiciones infinitesimales en función de los morfismos de completación (descritos en el Teorema 3.4.4) y de las condiciones infinitesimales ádicas.

El siguiente teorema traslada una propiedad de caracterización de los morfismos no ramificados conocida por Grothendieck ([**EGA IV**<sub>4</sub>, (18.4.7)]) al contexto de esquemas formales.

**TEOREMA 3.5.1.** *Sea  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  un morfismo en  $\text{Sfn}$  no ramificado en  $x \in \mathfrak{X}$ . Entonces existe  $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{X}$  abierto con  $x \in \mathfrak{U}$  tal que  $f|_{\mathfrak{U}}$  se factoriza*

$$\mathfrak{U} \xrightarrow{\kappa} \mathfrak{X}' \xrightarrow{f'} \mathfrak{Y}$$

donde  $\kappa$  es un pseudo encaje cerrado y  $f'$  es un morfismo étale ádico.

**DEMOSTRACIÓN.** Sean  $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$  y  $\mathcal{K} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$  Ideales de definición tales que  $f^*(\mathcal{K})\mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \subset \mathcal{J}$ . El morfismo de esquemas  $f_0$  asociado a estos ideales es no ramificado en  $x$  (Proposición 3.1.1) y, por [**EGA IV**<sub>4</sub>, (18.4.7)] existe un abierto  $U_0 \subset X_0$  con  $x \in U_0$  tal que  $f_0|_{U_0}$  se factoriza en

$$U_0 \xrightarrow{\kappa_0} X'_0 \xrightarrow{f'_0} Y_0$$

donde  $\kappa_0$  es un encaje cerrado y  $f'_0$  es un morfismo étale. El Teorema 3.4.5 implica que existe un morfismo  $\mathfrak{X}' \xrightarrow{f'} \mathfrak{Y}$  étale ádico en  $\text{Sfn}$  tal que  $\mathfrak{X}' \times_{\mathfrak{Y}} Y_0 = X'_0$ . Entonces si  $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{X}$  es el abierto con espacio topológico subyacente  $U_0$ , por la Proposición 3.4.1 existe un morfismo  $\mathfrak{U} \xrightarrow{\kappa} \mathfrak{X}'$  tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathfrak{U} & \xrightarrow{f|_{\mathfrak{U}}} & \mathfrak{Y} \\
 & \searrow \kappa & \nearrow f' \\
 & \mathfrak{X}' & \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 U_0 & \xrightarrow{\quad} & Y_0 \\
 & \searrow \kappa_0 & \nearrow f'_0 \\
 & X'_0 & 
 \end{array}$$

Como  $f$  es no ramificado, por la Proposición 2.2.15 se verifica que  $\kappa$  es no ramificado. Por otra parte,  $\kappa_0$  es un encaje cerrado y entonces, aplicando el Corolario 3.1.13 se tiene que  $\kappa$  es un pseudo encaje cerrado.  $\square$

Como consecuencia del resultado anterior obtenemos la siguiente descripción local que dice que los morfismos étales son composición de una completión con un morfismo étale ádico.

**TEOREMA 3.5.2.** *Sea  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  un morfismo en  $\text{Sfn}$  étale en  $x \in \mathfrak{X}$ . Entonces existe  $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{X}$  abierto con  $x \in \mathfrak{U}$  tal que  $f|_{\mathfrak{U}}$  se factoriza*

$$\mathfrak{U} \xrightarrow{\kappa} \mathfrak{X}' \xrightarrow{f'} \mathfrak{Y}$$

donde  $\kappa$  es un morfismo de completión y  $f'$  es un morfismo étale ádico.

DEMOSTRACIÓN. Por el teorema anterior se tiene que existe  $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{X}$  abierto con  $x \in \mathfrak{U}$  tal que  $f|_{\mathfrak{U}}$  se factoriza en

$$\mathfrak{U} \xrightarrow{\kappa} \mathfrak{X}' \xrightarrow{f'} \mathfrak{Y}$$

donde  $\kappa$  es un pseudo encaje cerrado y  $f'$  es un morfismo étale ádico. Entonces como  $f|_{\mathfrak{U}}$  es étale y  $f'$  es un morfismo étale ádico, por la Proposición 2.2.15 se tiene que  $\kappa$  es étale y aplicando el Teorema 3.4.4 resulta que  $\kappa$  es un morfismo de completión.  $\square$

TEOREMA 3.5.3. *Sea  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  un morfismo en Sfn liso en  $x \in \mathfrak{X}$ . Entonces existe  $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{X}$  abierto con  $x \in \mathfrak{U}$  tal que  $f|_{\mathfrak{U}}$  se factoriza*

$$\mathfrak{U} \xrightarrow{\kappa} \mathfrak{X}' \xrightarrow{f'} \mathfrak{Y}$$

donde  $\kappa$  es un morfismo de completión y  $f'$  es un morfismo liso ádico.

DEMOSTRACIÓN. Por la Proposición 3.2.9 existe  $\mathfrak{V} \subset \mathfrak{X}$  abierto con  $x \in \mathfrak{V}$  tal que  $f|_{\mathfrak{V}}$  se factoriza en

$$\mathfrak{V} \xrightarrow{g} \mathbb{A}_{\mathfrak{Y}}^n \xrightarrow{p} \mathfrak{Y}$$

donde  $g$  es étale y  $p$  es la proyección canónica. Aplicando el teorema anterior al morfismo  $g$  se concluye que existe  $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{X}$  abierto con  $x \in \mathfrak{U}$  tal que  $f|_{\mathfrak{U}}$  se factoriza en

$$\mathfrak{U} \xrightarrow{\kappa} \mathfrak{X}' \xrightarrow{f''} \mathbb{A}_{\mathfrak{Y}}^n \xrightarrow{p} \mathfrak{Y}$$

donde  $\kappa$  es un morfismo de completión,  $f''$  es un morfismo étale ádico y  $p$  es la proyección canónica, de donde se sigue que  $f' = f'' \circ p$  es liso ádico.  $\square$



## CAPÍTULO 4

### Teoría básica de deformación de esquemas formales lisos

Al igual que ocurre en Sch los morfismos lisos son el concepto central de una teoría de deformación en Sfn. El problema consiste en construir morfismos que extienden un morfismo sobre un esquema formal liso a una base que es un “entorno infinitesimal” de la original. Se plantean, por tanto, las cuestiones de existencia y unicidad. Esta teoría se controla mediante cohomología, resultan especialmente útiles los cálculos empleando el complejo de Čech. Se plantea también la construcción de esquemas sobre un entorno infinitesimal de la base. La existencia de tal levantamiento estará controlada en un grupo de cohomología de orden 2 y por emplear métodos elementales, estilo Čech nos ceñiremos al caso separado.

Todos los resultados de este capítulo generalizan a los resultados análogos en Sch. Para su desarrollo nos hemos guiado por la exposición hecha en [I, p. 111–113].

#### 4.1. Levantamiento de morfismos

Dado  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  un morfismo de pseudo tipo finito consideremos un diagrama conmutativo en Sfn

$$\begin{array}{ccc}
 \mathfrak{Z}_0 & \xrightarrow{i} & \mathfrak{Z} \\
 u_0 \downarrow & \swarrow \text{---} & \downarrow \\
 \mathfrak{X} & \xrightarrow{f} & \mathfrak{Y}
 \end{array}$$

donde  $\mathfrak{Z}_0 \hookrightarrow \mathfrak{Z}$  es un subesquema formal cerrado dado por un Ideal  $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{Z}}$  de cuadrado nulo. Observemos que el morfismo  $i$  es la identidad como aplicación de espacios topológicos y, por lo tanto, podemos hacer la identificación  $i_*\mathcal{O}_{\mathfrak{Z}_0} \equiv \mathcal{O}_{\mathfrak{Z}_0}$ . A través de esta identificación se tiene que el Ideal  $\mathcal{I}$  tiene estructura de  $\mathcal{O}_{\mathfrak{Z}_0}$ -Módulo y además  $i^*\mathcal{I} = \mathcal{I}$ . Un morfismo  $\mathfrak{Z} \xrightarrow{u} \mathfrak{X}$  es un *levantamiento de  $u_0$  sobre  $\mathfrak{Y}$*  si hace conmutativo el diagrama anterior. ¿Cuándo podemos asegurar la unicidad y la existencia de levantamiento para un  $\mathfrak{Y}$ -morfismo  $\mathfrak{Z}_0 \xrightarrow{u_0} \mathfrak{X}$ ? En 4.1.1 se demuestra que si  $\text{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{Z}_0}}(u_0^*\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^1, \mathcal{I}) = 0$  entonces el levantamiento es único. Y la Proposición 4.1.2 establece que existe una obstrucción en  $\text{Ext}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{Z}_0}}^1(u_0^*\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^1, \mathcal{I})$

a la existencia de levantamiento. Por ejemplo, si  $f$  es étale para todo morfismo  $u_0$  en las condiciones anteriores siempre existe un único levantamiento (véase el Corolario 2.2.4).

4.1.1. De 2.2.17 se deducen los dos resultados siguientes relativos a la unicidad del levantamiento:

- (1) Si  $\mathfrak{Z} \xrightarrow{u} \mathfrak{X}$ ,  $\mathfrak{Z} \xrightarrow{v} \mathfrak{X}$  son dos levantamientos de  $u_0$  sobre  $\mathfrak{Y}$ , el morfismo

$$\mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \xrightarrow{u^\# - v^\#} u_{0*}\mathcal{I}$$

es una  $\mathfrak{Y}$ -derivación continua. El Lema 2.1.23 y el Teorema 2.1.22 implican que existe un único morfismo de  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -Módulos  $\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^1 \xrightarrow{\phi} u_{0*}\mathcal{I}$  que hace el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}} & \xrightarrow{\widehat{d}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}} & \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^1 \\ \downarrow u^\# - v^\# & \searrow \phi & \\ u_{0*}\mathcal{I} & & \end{array}$$

conmutativo.

- (2) Fijado un levantamiento  $\mathfrak{Z} \xrightarrow{u} \mathfrak{X}$  de  $u_0$  y dado  $\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^1 \xrightarrow{\phi} u_{0*}\mathcal{I}$  un morfismo de  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -Módulos, se verifica que  $v^\# := u^\# + \phi \circ \widehat{d}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}$  define otro levantamiento de  $u_0$ .

En resumen, si existe algún levantamiento  $\mathfrak{Z} \rightarrow \mathfrak{X}$  de  $u_0$  sobre  $\mathfrak{Y}$ , entonces el conjunto de los levantamientos de  $u_0$  sobre  $\mathfrak{Y}$  es un espacio afín sobre  $\text{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}}(\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^1, u_{0*}\mathcal{I})$  (o equivalentemente sobre  $\text{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{Z}_0}}(u_0^*\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^1, \mathcal{I})$ ).

OBSERVACIÓN. Utilizando el lenguaje de teoría de torsores los resultados en 4.1.1 expresan que el haz en  $\mathfrak{Z}_0$  que para cada  $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{Z}$  abierto asocia al abierto correspondiente  $\mathfrak{U}_0 \subset \mathfrak{Z}_0$  el conjunto de levantamientos  $\mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{X}$  de  $u_0|_{\mathfrak{U}_0}$  sobre  $\mathfrak{Y}$  es un pseudo torsor sobre  $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathfrak{Z}_0}}(u_0^*\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^1, \mathcal{I})$ .

Bajo las hipótesis de 4.1.1, ¿cuándo podemos asegurar la existencia de levantamiento de  $u_0$  sobre  $\mathfrak{Y}$ ? En la Proposición 2.2.2 se ha visto que si  $f$  es liso y  $\mathfrak{Z}_0 \hookrightarrow \mathfrak{Z}$  está en  $\text{Sfn}_{\text{af}}$ , entonces existe levantamiento de  $u_0$  sobre  $\mathfrak{Y}$ . El problema es, por tanto, de recolección de datos locales a un dato global.

PROPOSICIÓN 4.1.2. *Consideremos un diagrama conmutativo en  $\text{Sfn}$*

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{Z}_0 & \hookrightarrow & \mathfrak{Z} \\ \downarrow u_0 & \swarrow u & \downarrow \\ \mathfrak{X} & \xrightarrow{f} & \mathfrak{Y} \end{array}$$

donde  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  es un morfismo liso y  $\mathfrak{Z}_0 \hookrightarrow \mathfrak{Z}$  es un subesquema formal cerrado dado por un Ideal  $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{Z}}$  de cuadrado nulo. Entonces existe  $c_{u_0} \in \text{Ext}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{Z}_0}}^1(u_0^*\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^1, \mathcal{I})$  de modo que:

$c_{u_0} = 0$  si, y sólo si, existe  $\mathfrak{Z} \xrightarrow{u} \mathfrak{X}$  un levantamiento de  $u_0$  sobre  $\mathfrak{Y}$ .

DEMOSTRACIÓN. Sea  $(\mathfrak{U}_\alpha)$  un recubrimiento afín abierto de  $\mathfrak{Z}$  y  $\mathfrak{U} = (\mathfrak{U}_{\alpha,0})$  el recubrimiento afín abierto correspondiente de  $\mathfrak{Z}_0$  de modo que, para todo  $\alpha$ ,  $\mathfrak{U}_{\alpha,0} \hookrightarrow \mathfrak{U}_\alpha$  es un encaje cerrado en  $\mathbf{Sfn}_{\text{af}}$  dado por el Ideal  $\mathcal{I}|_{\mathfrak{U}_\alpha}$  de cuadrado nulo. Como  $f$  es un morfismo liso, la Proposición 2.2.2 implica que para cada  $\alpha$  existe un levantamiento  $\mathfrak{U}_\alpha \xrightarrow{v_\alpha} \mathfrak{X}$  de  $u_0|_{\mathfrak{U}_{\alpha,0}}$  sobre  $\mathfrak{Y}$ . Para cada par de índices  $\alpha, \beta$  tal que  $\mathfrak{U}_{\alpha\beta} := \mathfrak{U}_\alpha \cap \mathfrak{U}_\beta \neq \emptyset$ , si llamamos  $\mathfrak{U}_{\alpha\beta,0}$  al abierto correspondiente en  $\mathfrak{Z}_0$  aplicando 4.1.1.(1) se verifica que existe un único morfismo de  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -Módulos  $\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^1 \xrightarrow{\phi_{\alpha\beta}} (u_0|_{\mathfrak{U}_{\alpha\beta,0}})_*(\mathcal{I}|_{\mathfrak{U}_{\alpha\beta,0}})$  tal que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}} & \xrightarrow{\widehat{d}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}} & \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^1 \\ \downarrow (v_\alpha|_{\mathfrak{U}_{\alpha\beta}})^\# - (v_\beta|_{\mathfrak{U}_{\alpha\beta}})^\# & & \nearrow \phi_{\alpha\beta} \\ & & (u_0|_{\mathfrak{U}_{\alpha\beta,0}})_*(\mathcal{I}|_{\mathfrak{U}_{\alpha\beta,0}}) \end{array}$$

Consideremos  $u_0^* \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^1|_{\mathfrak{U}_{\alpha\beta}} \rightarrow \mathcal{I}|_{\mathfrak{U}_{\alpha\beta,0}}$  el morfismo de  $\mathcal{O}_{\mathfrak{U}_{\alpha\beta,0}}$ -Módulos adjunto de  $\phi_{\alpha\beta}$ , que continuaremos denotando por  $\phi_{\alpha\beta}$  cometiendo un pequeño abuso de notación. La familia de morfismos  $\phi_{\mathfrak{U}} := (\phi_{\alpha\beta})$  verifica la condición de cociclo; es decir, para cualesquiera  $\alpha, \beta, \gamma$  tales que  $\mathfrak{U}_{\alpha\beta\gamma} := \mathfrak{U}_\alpha \cap \mathfrak{U}_\beta \cap \mathfrak{U}_\gamma \neq \emptyset$ , se tiene que

$$\phi_{\alpha\beta}|_{\mathfrak{U}_{\alpha\beta\gamma}} - \phi_{\alpha\gamma}|_{\mathfrak{U}_{\alpha\beta\gamma}} + \phi_{\beta\gamma}|_{\mathfrak{U}_{\alpha\beta\gamma}} = 0 \quad (4.1.2.1)$$

Por lo tanto,  $\phi_{\mathfrak{U}} \in \check{Z}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathfrak{Z}_0}}(u_0^* \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^1, \mathcal{I}))$ . Además, resulta que su clase  $[\phi_{\mathfrak{U}}] \in \check{H}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathfrak{Z}_0}}(u_0^* \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^1, \mathcal{I}))$  no depende de los levantamientos  $v_\alpha$ . En efecto, si, para cada  $\alpha$  arbitrario,  $\mathfrak{U}_\alpha \xrightarrow{w_\alpha} \mathfrak{X}$  es otro levantamiento de  $u_0|_{\mathfrak{U}_{\alpha,0}}$  sobre  $\mathfrak{Y}$ , por 4.1.1.(1) existe un único  $\phi_\alpha \in \text{Hom}_{\mathfrak{X}}(\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^1, (u_0|_{\mathfrak{U}_{\alpha,0}})_*(\mathcal{I}|_{\mathfrak{U}_\alpha}))$  tal que  $v_\alpha^\# - w_\alpha^\# = \phi_\alpha \circ \widehat{d}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}$ . Entonces para todo par de índices  $\alpha, \beta$  tales que  $\mathfrak{U}_{\alpha\beta} \neq \emptyset$  dado  $\psi_{\alpha\beta} \in \text{Hom}_{\mathfrak{X}}(\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^1, (u_0|_{\mathfrak{U}_{\alpha\beta,0}})_*(\mathcal{I}|_{\mathfrak{U}_{\alpha\beta}}))$  tal que  $w_\alpha^\#|_{\mathfrak{U}_{\alpha\beta}} - w_\beta^\#|_{\mathfrak{U}_{\alpha\beta}} = \psi_{\alpha\beta} \circ \widehat{d}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}$ , se tiene que

$$\psi_{\alpha\beta} = \phi_{\alpha\beta} + \phi_\beta|_{\mathfrak{U}_{\alpha\beta}} - \phi_\alpha|_{\mathfrak{U}_{\alpha\beta}}$$

En otras palabras, los cociclos  $\psi_{\mathfrak{U}} = (\psi_{\alpha\beta})$  y  $\phi_{\mathfrak{U}}$  se diferencian en un coborde de donde se concluye que  $[\phi_{\mathfrak{U}}] = [\psi_{\mathfrak{U}}] \in \check{H}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathfrak{Z}_0}}(u_0^* \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^1, \mathcal{I}))$ . Con un razonamiento análogo se probaría que, dado  $\mathfrak{Y}$  un refinamiento de  $\mathfrak{U}$ , entonces  $[\phi_{\mathfrak{U}}] = [\phi_{\mathfrak{Y}}] \in \check{H}^1(\mathfrak{Z}_0, \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathfrak{Z}_0}}(u_0^* \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^1, \mathcal{I}))$ . Se define:

$$\begin{aligned} c_{u_0} := [\phi_{\mathfrak{U}}] \in \check{H}^1(\mathfrak{Z}_0, \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathfrak{Z}_0}}(u_0^* \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^1, \mathcal{I})) &= \quad ([\mathbf{T}, (5.4.15)]) \\ & \quad \mathbf{H}^1(\mathfrak{Z}_0, \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathfrak{Z}_0}}(u_0^* \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^1, \mathcal{I})) \end{aligned}$$

Por otra parte, como  $f$  es liso la Proposición 2.3.5 implica que  $\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^1$  un  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -Módulo localmente libre, con lo cual,

$$c_{u_0} \in H^1(\mathfrak{Z}_0, \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathfrak{Z}_0}}(u_0^* \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^1, \mathcal{I})) = \text{Ext}^1(u_0^* \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^1, \mathcal{I})$$

Veamos que  $c_{u_0}$  es la obstrucción para la existencia de levantamiento de  $u_0$ . Si  $u_0$  admite un levantamiento se comprueba fácilmente que  $c_{u_0} = 0$ . Recíprocamente, supongamos que  $c_{u_0} = 0$ . A partir de  $(v_\alpha)$  vamos a construir una colección  $(\mathfrak{U}_\alpha \xrightarrow{u_\alpha} \mathfrak{X})$  de levantamientos de  $u_0|_{\mathfrak{U}_{\alpha,0}}$  sobre  $\mathfrak{Y}$  y, que se recolectan en un morfismo  $\mathfrak{Z} \xrightarrow{u} \mathfrak{X}$ . Por hipótesis, se tiene que existe  $(\phi_\alpha) \in \check{C}^0(\mathfrak{U}, \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathfrak{Z}_0}}(u_0^* \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^1, \mathcal{I}))$  tal que, para cada par de índices  $\alpha, \beta$  con  $\mathfrak{U}_{\alpha\beta} \neq \emptyset$ ,

$$\phi_\alpha|_{\mathfrak{U}_{\alpha\beta}} - \phi_\beta|_{\mathfrak{U}_{\alpha\beta}} = \phi_{\alpha\beta} \quad (4.1.2.2)$$

Para cada  $\alpha$ , sea  $\mathfrak{U}_\alpha \xrightarrow{u_\alpha} \mathfrak{X}$  el morfismo que coincide con  $u_0|_{\mathfrak{U}_{\alpha,0}}$  como aplicación de espacios topológicos y dado como morfismo de espacios topológicamente anillados por  $u_\alpha^\sharp := v_\alpha^\sharp - \phi_\alpha \circ \widehat{d}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}$ . Entonces, por 4.1.1.(2) se tiene que  $u_\alpha$  es un levantamiento de  $u_0|_{\mathfrak{U}_{\alpha,0}}$  sobre  $\mathfrak{Y}$  para todo  $\alpha$  y, de los datos (4.1.2.2) y (4.1.2.1) se deduce que los morfismos  $u_\alpha$  se recolectan en un morfismo  $\mathfrak{Z} \xrightarrow{u} \mathfrak{X}$ .  $\square$

**COROLARIO 4.1.3.** *En las hipótesis de la proposición anterior, si  $\mathfrak{Z}$  es un esquema formal afín, existe un levantamiento de  $u_0$  sobre  $\mathfrak{Y}$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Como  $\mathfrak{Z}_0$  es un esquema formal afín se tiene que

$$H^1(\mathfrak{Z}_0, \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathfrak{Z}_0}}(u_0^* \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^1, \mathcal{I})) = 0 \quad [\mathbf{AJL1}, \text{Corollary 3.1.8}]$$

y, por lo tanto, el corolario se deduce de la proposición anterior.  $\square$

Obsérvese que el resultado anterior ya se había probado en la Proposición 2.2.2.

## 4.2. Levantamiento de esquemas formales lisos

Dados  $\mathfrak{X}_0 \xrightarrow{f_0} \mathfrak{Y}_0$  un morfismo liso e  $\mathfrak{Y}_0 \hookrightarrow \mathfrak{Y}$  un encaje cerrado dado por un Ideal  $\mathcal{I}$  de cuadrado nulo, nos planteamos las siguientes preguntas:

- (1) Supongamos que existe un  $\mathfrak{Y}$ -esquema formal  $\mathfrak{X}$  liso tal que  $\mathfrak{X} \times_{\mathfrak{Y}} \mathfrak{Y}_0 = \mathfrak{X}_0$ , ¿cuándo es  $\mathfrak{X}$  único? En la Proposición 4.2.3 se verá que si  $\text{Ext}^1(\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}_0/\mathfrak{Y}_0}^1, f_0^* \mathcal{I}) = 0$ , entonces  $\mathfrak{X}$  es único salvo isomorfismo.
- (2) ¿Existe un  $\mathfrak{Y}$ -esquema formal  $\mathfrak{X}$  liso tal que  $\mathfrak{X} \times_{\mathfrak{Y}} \mathfrak{Y}_0 = \mathfrak{X}_0$ ? Para cada punto  $x \in \mathfrak{X}_0$  existe  $\mathfrak{U}_0 \subset \mathfrak{X}_0$  un abierto con  $x \in \mathfrak{U}_0$  y un esquema formal localmente noetheriano  $\mathfrak{U}$  liso sobre  $\mathfrak{Y}$  tal que  $\mathfrak{U}_0 = \mathfrak{U} \times_{\mathfrak{Y}} \mathfrak{Y}_0$  (véase el Corolario 3.2.14). Y, en general, la Proposición 4.2.4 demostrará la existencia de un elemento en  $\text{Ext}^2(\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}_0/\mathfrak{Y}_0}^1, f_0^* \mathcal{I})$  de cuya anulación depende la existencia de  $\mathfrak{X}$ . En particular, cuando  $f_0$  est en  $\text{Sfn}_{\text{af}}$  el Corolario 4.2.5 asegura la existencia de  $\mathfrak{X}$ .

4.2.1. Supongamos que  $\mathfrak{X}_0 \xrightarrow{f_0} \mathfrak{Y}_0$  es un morfismo liso e  $\mathfrak{Y}_0 \hookrightarrow \mathfrak{Y}$  un encaje cerrado dado por un Ideal  $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$  de cuadrado nulo, por lo tanto,  $\mathfrak{Y}_0$  e  $\mathfrak{Y}$  tienen el mismo espacio topológico subyacente. Si existe  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  un morfismo liso en Sfn tal que el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{X}_0 & \xrightarrow{f_0} & \mathfrak{Y}_0 \\ \downarrow j & & \downarrow \\ \mathfrak{X} & \xrightarrow{f} & \mathfrak{Y} \end{array}$$

es cartesiano diremos que  $\mathfrak{X}$  (o que el morfismo  $\mathfrak{X}_0 \hookrightarrow \mathfrak{X}$ ) es un *levantamiento liso de  $\mathfrak{X}_0$  sobre  $\mathfrak{Y}$* .

4.2.2. Sean  $\mathfrak{X}_0 \xrightarrow{f_0} \mathfrak{Y}_0$  un morfismo liso,  $\mathfrak{Y}_0 \hookrightarrow \mathfrak{Y}$  un encaje cerrado dado por un Ideal  $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$  de cuadrado nulo y  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  un levantamiento liso de  $\mathfrak{X}_0$  sobre  $\mathfrak{Y}$ . Observemos que, como  $f$  es un morfismo plano,  $j$  es un encaje cerrado dado (salvo isomorfismo) por el Ideal  $f_0^*\mathcal{I}$  de cuadrado nulo.

4.2.2.1. Denotemos por  $\text{Aut}_{\mathfrak{X}_0}(\mathfrak{X})$  el grupo de  $\mathfrak{Y}$ -automorfismos de  $\mathfrak{X}$  que inducen la identidad en  $\mathfrak{X}_0$ . En particular, se tiene que  $1_{\mathfrak{X}} \in \text{Aut}_{\mathfrak{X}_0}(\mathfrak{X})$  y, por lo tanto,  $\text{Aut}_{\mathfrak{X}_0}(\mathfrak{X}) \neq \emptyset$ . Existe una correspondencia biunívoca

$$\text{Aut}_{\mathfrak{X}_0}(\mathfrak{X}) \cong \text{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}}(\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^1, j_*f_0^*\mathcal{I}) \cong \text{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_0}}(\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}_0/\mathfrak{Y}_0}^1, f_0^*\mathcal{I})$$

definida vía el isomorfismo  $\text{Dercont}_{\mathfrak{Y}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}, j_*f_0^*\mathcal{I}) \cong \text{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}}(\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^1, j_*f_0^*\mathcal{I})$  (Teorema 2.1.22) por  $g \in \text{Aut}_{\mathfrak{X}_0}(\mathfrak{X}) \rightsquigarrow g^\# - 1_{\mathfrak{X}}^\# \in \text{Dercont}_{\mathfrak{Y}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}, j_*f_0^*\mathcal{I})$ . En efecto, dado  $\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^1 \xrightarrow{\phi} j_*f_0^*\mathcal{I}$  un homomorfismo de  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -Módulos, por 4.1.1.(1) el morfismo  $\mathfrak{X} \xrightarrow{g} \mathfrak{X}$  definido por  $g^\# = 1_{\mathfrak{X}}^\# + \phi \circ \widehat{d}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}$  y que es la identidad como aplicación topológica, está en  $\text{Aut}_{\mathfrak{X}_0}(\mathfrak{X})$  (su inverso  $g^{-1}$  está definido por  $(g^{-1})^\# = 1_{\mathfrak{X}}^\# - \phi \circ \widehat{d}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}$ ).

4.2.2.2. Si  $\mathfrak{X}_0$  está en  $\text{Sfn}_{\text{af}}$  y  $\mathfrak{X}_0 \xrightarrow{j'} \mathfrak{X}'$  es otro levantamiento liso sobre  $\mathfrak{Y}$ , entonces existe un  $\mathfrak{Y}$ -isomorfismo  $\mathfrak{X} \xrightarrow{g} \mathfrak{X}'$  tal que  $g|_{\mathfrak{X}_0} = j'$ . Así es, aplicando la Proposición 2.2.2 existen morfismos  $\mathfrak{X} \xrightarrow{g} \mathfrak{X}'$ ,  $\mathfrak{X}' \xrightarrow{g'} \mathfrak{X}$  en Sfn tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{X}_0 & \xrightarrow{j} & \mathfrak{X} \\ & \searrow j' & \downarrow g \\ & & \mathfrak{X}' \xrightarrow{g'} \mathfrak{X} \end{array}$$

Entonces como  $g' \circ g|_{\mathfrak{X}_0} = j$ ,  $g \circ g'|_{\mathfrak{X}_0} = j'$ , por 4.1.1.(1) se verifica que existen  $\phi \in \text{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}}(\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^1, j_*f_0^*\mathcal{I})$  y  $\phi' \in \text{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}}(\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}'/\mathfrak{Y}}^1, j'_*f_0^*\mathcal{I})$  tales que

$$(g' \circ g)^\# = 1_{\mathfrak{X}}^\# + \phi \circ \widehat{d}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}} \quad (g \circ g')^\# = 1_{\mathfrak{X}'}^\# + \phi' \circ \widehat{d}_{\mathfrak{X}'/\mathfrak{Y}}$$

De 4.2.2.1 se deduce que  $g' \circ g \in \text{Aut}_{\mathfrak{X}_0}(\mathfrak{X})$ ,  $g \circ g' \in \text{Aut}_{\mathfrak{X}_0}(\mathfrak{X}')$  y, por lo tanto,  $g$  es un isomorfismo.

4.2.2.3. Si  $\mathfrak{X}_0 \xrightarrow{j'} \mathfrak{X}'$  es otro levantamiento liso sobre  $\mathfrak{Y}$  entonces el conjunto de  $\mathfrak{Y}$ -isomorfismos de  $\mathfrak{X}$  en  $\mathfrak{X}'$  que inducen la identidad en  $\mathfrak{X}_0$  es un espacio afín sobre  $\text{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_0}}(\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}_0/\mathfrak{Y}_0}^1, f_0^* \mathcal{I})$  (o, equivalentemente por adjunción sobre  $\text{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}}(\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}'/\mathfrak{Y}}^1, j'_* f_0^* \mathcal{I})$ ). Veamos por qué. Supongamos que  $\mathfrak{X} \xrightarrow{g} \mathfrak{X}'$  y  $\mathfrak{X} \xrightarrow{h} \mathfrak{X}'$  son dos  $\mathfrak{Y}$ -isomorfismos tales que  $g|_{\mathfrak{X}_0} = h|_{\mathfrak{X}_0} = j'$ . Por 4.1.1.(1) existe un único homomorfismo de  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}$ -Módulos  $\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}'/\mathfrak{Y}}^1 \xrightarrow{\phi} j'_* f_0^* \mathcal{I}$  tal que  $g^\sharp - h^\sharp = \phi \circ \widehat{d}_{\mathfrak{X}'/\mathfrak{Y}}$ . Recíprocamente, si  $\phi \in \text{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_0}}(\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}_0/\mathfrak{Y}_0}^1, f_0^* \mathcal{I}) \cong \text{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}}(\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}'/\mathfrak{Y}}^1, j'_* f_0^* \mathcal{I})$  y  $\mathfrak{X} \xrightarrow{g} \mathfrak{X}'$  es un  $\mathfrak{Y}$ -isomorfismo con  $g|_{\mathfrak{X}_0} = j'$ , el  $\mathfrak{Y}$ -morfismo  $\mathfrak{X} \xrightarrow{h} \mathfrak{X}'$  definido por  $h^\sharp = g^\sharp + \phi \circ \widehat{d}_{\mathfrak{X}'/\mathfrak{Y}}$  que como aplicación topológica es la identidad, es un isomorfismo. En efecto, se verifica que  $(h \circ g^{-1})^\sharp - 1_{\mathfrak{X}'}^\sharp \in \text{Dercont}_{\mathfrak{Y}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}, j'_* f_0^* \mathcal{I})$  y que  $(g^{-1} \circ h)^\sharp - 1_{\mathfrak{X}}^\sharp \in \text{Dercont}_{\mathfrak{Y}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}, j_* f_0^* \mathcal{I})$ , de donde por 4.2.2.1 resulta que  $h \circ g^{-1} \in \text{Aut}_{\mathfrak{X}_0}(\mathfrak{X}')$  y  $g^{-1} \circ h \in \text{Aut}_{\mathfrak{X}_0}(\mathfrak{X})$  y, por lo tanto,  $h$  es un isomorfismo.

PROPOSICIÓN 4.2.3. Sean  $\mathfrak{Y}_0 \hookrightarrow \mathfrak{Y}$  un encaje cerrado en  $\text{Sfn}$  definido por un Ideal  $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$  de cuadrado nulo y  $\mathfrak{X}_0 \xrightarrow{f_0} \mathfrak{Y}_0$  un morfismo liso en  $\text{Sfn}$  y supongamos que existe un levantamiento liso de  $\mathfrak{X}_0$  sobre  $\mathfrak{Y}$ . Entonces el conjunto de las clases de isomorfía de levantamientos lisos de  $\mathfrak{X}_0$  sobre  $\mathfrak{Y}$  es un espacio afín sobre  $\text{Ext}^1(\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}_0/\mathfrak{Y}_0}^1, f_0^* \mathcal{I})$ .

DEMOSTRACIÓN. Sean  $\mathfrak{X}_0 \xrightarrow{j} \mathfrak{X}$  y  $\mathfrak{X}_0 \xrightarrow{j'} \mathfrak{X}'$  dos levantamientos lisos sobre  $\mathfrak{Y}$ . Dado  $\mathfrak{U} = (\mathfrak{U}_{\alpha,0})$  un recubrimiento abierto afín de  $\mathfrak{X}_0$  sean  $(\mathfrak{U}_\alpha)$  y  $(\mathfrak{U}'_\alpha)$  los recubrimientos afines abiertos de  $\mathfrak{X}$  y  $\mathfrak{X}'$  correspondientes. Por 4.2.2.2 para cada  $\alpha$  existe un isomorfismo de  $\mathfrak{Y}$ -esquemas formales  $\mathfrak{U}_\alpha \xrightarrow{u_\alpha} \mathfrak{U}'_\alpha$  tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{U}_{\alpha,0} & \xrightarrow{j|_{\mathfrak{U}_{\alpha,0}}} & \mathfrak{U}_\alpha \\ & \searrow j'|_{\mathfrak{U}_{\alpha,0}} & \downarrow u_\alpha \\ & & \mathfrak{U}'_\alpha \longrightarrow \mathfrak{Y} \end{array}$$

Por 4.2.2.3 para cada par de índices  $\alpha, \beta$  tal que  $\mathfrak{U}_{\alpha\beta,0} := \mathfrak{U}_{\alpha,0} \cap \mathfrak{U}_{\beta,0} \neq \emptyset$  si  $\mathfrak{U}_{\alpha\beta} := \mathfrak{U}_\alpha \cap \mathfrak{U}_\beta$  y  $\mathfrak{U}'_{\alpha\beta} := \mathfrak{U}'_\alpha \cap \mathfrak{U}'_\beta$ , existe un único homomorfismo de  $\mathcal{O}_{\mathfrak{U}_{\alpha\beta,0}}$ -Módulos  $\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}_0/\mathfrak{Y}_0}^1|_{\mathfrak{U}_{\alpha\beta,0}} \xrightarrow{\phi_{\alpha\beta}} (f_0^* \mathcal{I})|_{\mathfrak{U}_{\alpha\beta,0}}$  tal que su adjunto  $\widehat{\Omega}_{\mathfrak{U}'_{\alpha\beta}/\mathfrak{Y}}^1 \rightarrow (j'|_{\mathfrak{U}_{\alpha\beta,0}})_*(f_0^* \mathcal{I})|_{\mathfrak{U}'_{\alpha\beta}}$  que, con un abuso de notación continuaremos llamando  $\phi_{\alpha\beta}$ , verifica que

$$u_\alpha|_{\mathfrak{U}_{\alpha\beta}} - u_\beta|_{\mathfrak{U}_{\alpha\beta}} = \phi_{\alpha\beta} \circ \widehat{d}_{\mathfrak{U}'_{\alpha\beta}/\mathfrak{Y}}$$

Entonces  $\phi_{\mathfrak{U}} := (\phi_{\alpha\beta}) \in \check{C}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_0}}(\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}_0/\mathfrak{Y}_0}^1, f_0^*\mathcal{I}))$  verifica para todo  $\alpha, \beta, \gamma$  tal que  $\mathfrak{U}_{\alpha\beta\gamma} := \mathfrak{U}_\alpha \cap \mathfrak{U}_\beta \cap \mathfrak{U}_\gamma \neq \emptyset$ , la condición de cociclo

$$\phi_{\alpha\beta}|_{\mathfrak{U}_{\alpha\beta\gamma,0}} - \phi_{\alpha\gamma}|_{\mathfrak{U}_{\alpha\beta\gamma,0}} + \phi_{\beta\gamma}|_{\mathfrak{U}_{\alpha\beta\gamma,0}} = 0 \quad (4.2.3.3)$$

y, por lo tanto,  $\phi_{\mathfrak{U}} \in \check{Z}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_0}}(\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}_0/\mathfrak{Y}_0}^1, f_0^*\mathcal{I}))$ . La definición del elemento  $c_{\mathfrak{U}} := [\phi_{\mathfrak{U}}] \in \check{H}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_0}}(\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}_0/\mathfrak{Y}_0}^1, f_0^*\mathcal{I}))$  no depende de los isomorfismos  $u_\alpha$ . En efecto, dada  $(\mathfrak{U}_\alpha \xrightarrow{v_\alpha} \mathfrak{U}'_\alpha)$  otra colección de  $\mathfrak{Y}$ -isomorfismos tales que, para cada  $\alpha$ ,  $v_\alpha \circ j|_{\mathfrak{U}_{\alpha,0}} = j'|_{\mathfrak{U}_{\alpha,0}}$  sea  $\psi_{\mathfrak{U}}$  el elemento  $(\psi_{\alpha\beta}) \in \check{C}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_0}}(\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}_0/\mathfrak{Y}_0}^1, f_0^*\mathcal{I}))$  tal que  $v_\alpha|_{\mathfrak{U}_{\alpha\beta}} - v_\beta|_{\mathfrak{U}_{\alpha\beta}} = \psi_{\alpha\beta} \circ \widehat{d}_{\mathfrak{U}'_{\alpha\beta}/\mathfrak{Y}}$ , para cada par de índices  $\alpha, \beta$  tal que  $\mathfrak{U}_{\alpha\beta,0} \neq \emptyset$ . Por 4.2.2.3 existe  $(\phi_\alpha) \in \check{C}^0(\mathfrak{U}, \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_0}}(\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}_0/\mathfrak{Y}_0}^1, f_0^*\mathcal{I}))$  tal que, para cada  $\alpha$ ,  $u_\alpha - v_\alpha = \phi_\alpha \circ \widehat{d}_{\mathfrak{U}'_\alpha/\mathfrak{Y}}$  y, por lo tanto,  $[\phi_{\mathfrak{U}}] = [\psi_{\mathfrak{U}}] \in \check{H}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_0}}(\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}_0/\mathfrak{Y}_0}^1, f_0^*\mathcal{I}))$ . Por otro lado, si  $\mathfrak{Y}$  es un refinamiento por abiertos afines de  $\mathfrak{U}$ , de lo visto arriba se deduce que  $c_{\mathfrak{U}} = c_{\mathfrak{Y}}$  y entonces se define

$$c := [\phi_{\mathfrak{U}}] \in \check{H}^1(\mathfrak{X}_0, \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_0}}(\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}_0/\mathfrak{Y}_0}^1, f_0^*\mathcal{I})) = \quad ([\mathbf{T}, (5.4.15)]) \\ H^1(\mathfrak{X}_0, \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_0}}(\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}_0/\mathfrak{Y}_0}^1, f_0^*\mathcal{I})) = \text{Ext}^1(\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}_0/\mathfrak{Y}_0}^1, f_0^*\mathcal{I})$$

Recíprocamente, sea  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  un levantamiento liso de  $\mathfrak{X}_0$  y consideremos  $c \in \text{Ext}^1(\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}_0/\mathfrak{Y}_0}^1, f_0^*\mathcal{I})$ . Tomemos  $\mathfrak{U} = (\mathfrak{U}_{\alpha,0})$  un recubrimiento por abiertos afines de  $\mathfrak{X}_0$ ,  $(\mathfrak{U}_\alpha)$  el recubrimiento por abiertos afines correspondiente en  $\mathfrak{X}$  y  $\phi_{\mathfrak{U}} = (\phi_{\alpha\beta}) \in \check{Z}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_0}}(\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}_0/\mathfrak{Y}_0}^1, f_0^*\mathcal{I}))$  tal que  $c = [\phi_{\mathfrak{U}}]$ . Para cada par de índices  $\alpha, \beta$  tal que  $\mathfrak{U}_{\alpha\beta} = \mathfrak{U}_\alpha \cap \mathfrak{U}_\beta \neq \emptyset$ , el morfismo  $\mathfrak{U}_{\alpha\beta} \xrightarrow{u_{\alpha\beta}} \mathfrak{U}_{\alpha\beta}$  que es la identidad como aplicación topológica y que, como aplicación de espacios topológicamente anillados está dado por  $u_{\alpha\beta}^\# := 1_{\mathfrak{U}_{\alpha\beta}}^\# + \phi_{\alpha\beta} \circ \widehat{d}_{\mathfrak{U}_{\alpha\beta}/\mathfrak{Y}}$ , verifica:

- $u_{\alpha\beta} \in \text{Aut}_{\mathfrak{U}_{\alpha\beta,0}}(\mathfrak{U}_{\alpha\beta})$  (por 4.2.2.1)
- $u_{\alpha\beta}|_{\mathfrak{U}_{\alpha\beta\gamma}} \circ u_{\alpha\gamma}^{-1}|_{\mathfrak{U}_{\alpha\beta\gamma}} \circ u_{\beta\gamma}|_{\mathfrak{U}_{\alpha\beta\gamma}} = 1_{\mathfrak{U}_{\alpha\beta\gamma}}$ , para cualesquiera  $\alpha, \beta, \gamma$  tales que  $\mathfrak{U}_{\alpha\beta\gamma} := \mathfrak{U}_\alpha \cap \mathfrak{U}_\beta \cap \mathfrak{U}_\gamma \neq \emptyset$  (porque  $(\phi_{\alpha\beta})$  verifica la condición de cociclo (4.2.3.3))
- $u_{\alpha\alpha} = 1_{\mathfrak{U}_\alpha}$  y  $u_{\alpha\beta}^{-1} = u_{\beta\alpha}$

Entonces los  $\mathfrak{Y}$ -esquemas formales  $\mathfrak{U}_\alpha$  se recolectan proporcionando un levantamiento liso  $\mathfrak{X}' \xrightarrow{f'} \mathfrak{Y}$  de  $\mathfrak{X}_0$  a través de los morfismos de pegado  $u_{\alpha\beta}$ , ya que el morfismo  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  es compatible con los isomorfismos  $u_{\alpha\beta}$ .  $\square$

CONCLUSIÓN. La Proposición 4.2.3 en lenguaje de teoría de torsos admite la siguiente interpretación: el haz en  $\mathfrak{X}_0$  que asocia a cada abierto  $\mathfrak{U}_0 \subset \mathfrak{X}_0$  el conjunto de las clases de isomorfía de levantamientos lisos de  $\mathfrak{U}_0$  sobre  $\mathfrak{Y}$  es un pseudo torsor sobre  $\text{Ext}^1(\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}_0/\mathfrak{Y}_0}^1, f_0^*\mathcal{I})$ .

OBSERVACIÓN. En las hipótesis de la Proposición 4.2.3, si  $f_0$  e  $\mathfrak{Y}$  están en  $\text{Sfn}_{\text{af}}$ , se tiene que  $H^1(\mathfrak{X}_0, \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_0}}(\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}_0/\mathfrak{Y}_0}^1, f_0^*\mathcal{I})) = 0$  (cf. [AJL1, Corollary

3.1.8]) y, por lo tanto, existe una única clase de isomorfía de levantamientos de  $\mathfrak{X}_0$  sobre  $\mathfrak{Y}$ .

PROPOSICIÓN 4.2.4. *Sea  $\mathfrak{Y}_0 \hookrightarrow \mathfrak{Y}$  un encaje cerrado en Sfn dado por un Ideal  $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$  de cuadrado nulo y  $\mathfrak{X}_0 \xrightarrow{f_0} \mathfrak{Y}_0$  un morfismo en Sfn liso con  $\mathfrak{X}_0$  un esquema formal separado. Entonces existe  $c_{f_0} \in \text{Ext}^2(\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}_0/\mathfrak{Y}_0}^1, f_0^*\mathcal{I})$  de modo que:*

*$c_{f_0} = 0$  si, y sólo si, existe un levantamiento liso  $\mathfrak{X}$  de  $\mathfrak{X}_0$  sobre  $\mathfrak{Y}$ .*

DEMOSTRACIÓN. Por la Proposición 2.2.19 y por el Corolario 3.2.14 existe  $\mathfrak{U} = (\mathfrak{U}_{\alpha,0})$  un recubrimiento afín abierto de  $\mathfrak{X}_0$ , tal que para cada  $\alpha$  existe  $\mathfrak{U}_{\alpha}$  un levantamiento liso de  $\mathfrak{U}_{\alpha,0}$  sobre  $\mathfrak{Y}$ . Como  $\mathfrak{X}_0$  es un esquema formal separado  $\mathfrak{U}_{\alpha\beta,0} := \mathfrak{U}_{\alpha,0} \cap \mathfrak{U}_{\beta,0}$  es un abierto afín para cualesquiera  $\alpha, \beta$  y, si llamamos  $\mathfrak{U}_{\alpha\beta} \subset \mathfrak{U}_{\alpha}$  y  $\mathfrak{U}_{\beta\alpha} \subset \mathfrak{U}_{\beta}$  a los abiertos correspondientes, por 4.2.2.2 existe un isomorfismo  $\mathfrak{U}_{\alpha\beta} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{U}_{\beta\alpha}$  tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{U}_{\alpha\beta,0} & \hookrightarrow & \mathfrak{U}_{\alpha\beta} \\ & \searrow & \downarrow \wr_{u_{\alpha\beta}} \\ & & \mathfrak{U}_{\beta\alpha} \longrightarrow \mathfrak{Y} \end{array}$$

Ahora bien, para cualesquiera  $\alpha, \beta, \gamma$  tal que  $\mathfrak{U}_{\alpha\beta\gamma,0} := \mathfrak{U}_{\alpha,0} \cap \mathfrak{U}_{\beta,0} \cap \mathfrak{U}_{\gamma,0} \neq \emptyset$ , se verifica que

$$u_{\alpha\beta\gamma} := u_{\alpha\gamma}^{-1}|_{\mathfrak{U}_{\beta,0} \cap \mathfrak{U}_{\gamma,0}} \circ u_{\beta\gamma}|_{\mathfrak{U}_{\beta,0} \cap \mathfrak{U}_{\gamma,0}} \circ u_{\alpha\beta}|_{\mathfrak{U}_{\alpha,0} \cap \mathfrak{U}_{\beta,0}} \in \text{Aut}_{\mathfrak{U}_{\alpha\beta\gamma,0}}(\mathfrak{U}_{\alpha\beta} \cap \mathfrak{U}_{\alpha\gamma})$$

y por 4.2.2.1 existe un único  $\phi_{\alpha\beta\gamma} \in \Gamma(\mathfrak{U}_{\alpha\beta\gamma,0}, \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_0}}(\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}_0/\mathfrak{Y}_0}^1, f_0^*\mathcal{I}))$  tal que  $u_{\alpha\beta\gamma}^{\#} - 1_{\mathfrak{U}_{\alpha\beta\gamma,0}}^{\#} = \phi_{\alpha\beta\gamma}$ . Entonces el elemento

$$\phi_{\mathfrak{U}} := (\phi_{\alpha\beta\gamma}) \in \check{C}^2(\mathfrak{U}, \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_0}}(\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}_0/\mathfrak{Y}_0}^1, f_0^*\mathcal{I}))$$

verifica para cualesquiera  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  tal que  $\mathfrak{U}_{\alpha\beta\gamma\delta,0} := \mathfrak{U}_{\alpha,0} \cap \mathfrak{U}_{\beta,0} \cap \mathfrak{U}_{\gamma,0} \cap \mathfrak{U}_{\delta,0} \neq \emptyset$ , la condición de cociclo

$$\phi_{\alpha\beta\gamma}|_{\mathfrak{U}_{\alpha\beta\gamma\delta,0}} - \phi_{\alpha\gamma\delta}|_{\mathfrak{U}_{\alpha\beta\gamma\delta,0}} + \phi_{\beta\gamma\delta}|_{\mathfrak{U}_{\alpha\beta\gamma\delta,0}} - \phi_{\beta\delta\alpha}|_{\mathfrak{U}_{\alpha\beta\gamma\delta,0}} = 0 \quad (4.2.4.4)$$

y, por lo tanto,  $\phi_{\mathfrak{U}} \in \check{Z}^2(\mathfrak{U}, \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_0}}(\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}_0/\mathfrak{Y}_0}^1, f_0^*\mathcal{I}))$ . Utilizando 4.2.2.3 y con razonamientos análogos a los de la demostración de la Proposición 4.2.3, se comprueba que la definición de  $c_{\mathfrak{U}} := [\phi_{\mathfrak{U}}] \in \check{H}^2(\mathfrak{U}, \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_0}}(\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}_0/\mathfrak{Y}_0}^1, f_0^*\mathcal{I}))$  no depende de los isomorfismos  $u_{\alpha\beta}$  escogidos. Con lo cual, si  $\mathfrak{Y}$  es un refinamiento por abiertos afines de  $\mathfrak{U}$ , se tiene que

$$c_{\mathfrak{U}} = c_{\mathfrak{Y}} \in \check{H}^2(\mathfrak{X}_0, \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_0}}(\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}_0/\mathfrak{Y}_0}^1, f_0^*\mathcal{I}))$$



La Proposición 2.3.5 implica que  $\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}_0/\mathfrak{Y}_0}^1$  es un  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_0}$ -Módulo localmente libre. Además  $\mathfrak{X}_0$  es separado y, por lo tanto, se define<sup>1</sup>:

$$c_{f_0} := [\phi_{\mathfrak{U}}] \in \check{H}^2(\mathfrak{X}_0, \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_0}}(\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}_0/\mathfrak{Y}_0}^1, f_0^*\mathcal{I})) = \\ H^2(\mathfrak{X}_0, \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_0}}(\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}_0/\mathfrak{Y}_0}^1, f_0^*\mathcal{I})) = \text{Ext}^2(\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}_0/\mathfrak{Y}_0}^1, f_0^*\mathcal{I})$$

Veamos que  $c_{f_0}$  es la obstrucción para la existencia de levantamiento liso de  $\mathfrak{X}_0$  sobre  $\mathfrak{Y}$ . En efecto, si existe  $\mathfrak{X}$  un levantamiento liso de  $\mathfrak{X}_0$  sobre  $\mathfrak{Y}$  se tiene que  $c_{f_0} = 0$ . Recíprocamente, tomemos  $\mathfrak{U} = (\mathfrak{U}_{\alpha,0})$  un recubrimiento por abiertos afines de  $\mathfrak{X}_0$  y  $\mathfrak{U}_{\alpha}$  levantamiento liso de  $\mathfrak{U}_{\alpha,0}$  sobre  $\mathfrak{Y}$  para cada  $\alpha$ , de modo que, con las notaciones establecidas al comienzo de la demostración,  $c_{f_0} = [\phi_{\mathfrak{U}}]$  con  $\phi_{\mathfrak{U}} = (\phi_{\alpha\beta\gamma}) \in \check{Z}^2(\mathfrak{U}, \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_0}}(\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}_0/\mathfrak{Y}_0}^1, f_0^*\mathcal{I}))$ . Vamos a recolectar los  $\mathfrak{Y}$ -esquemas formales  $(\mathfrak{U}_{\alpha})$  a un levantamiento de  $\mathfrak{X}_0$  sobre  $\mathfrak{Y}$ . Por hipótesis se tiene que  $\phi_{\mathfrak{U}} \in \check{B}^2(\mathfrak{U}, \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_0}}(\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}_0/\mathfrak{Y}_0}^1, f_0^*\mathcal{I}))$  y, por lo tanto, existe  $(\phi_{\alpha\beta}) \in \check{C}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_0}}(\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}_0/\mathfrak{Y}_0}^1, f_0^*\mathcal{I}))$  tal que, para cualesquiera  $\alpha, \beta, \gamma$  con  $\mathfrak{U}_{\alpha\beta\gamma,0} \neq \emptyset$ ,

$$\phi_{\alpha\beta}|_{\mathfrak{U}_{\alpha\beta\gamma,0}} - \phi_{\alpha\gamma}|_{\mathfrak{U}_{\alpha\beta\gamma,0}} + \phi_{\beta\gamma}|_{\mathfrak{U}_{\alpha\beta\gamma,0}} = \phi_{\alpha\beta\gamma} \quad (4.2.4.5)$$

Para cada par de índices  $\alpha, \beta$  tal que  $\mathfrak{U}_{\alpha\beta,0} \neq \emptyset$ , el morfismo  $\mathfrak{U}_{\alpha\beta} \xrightarrow{v_{\alpha\beta}} \mathfrak{U}_{\beta\alpha}$  que es la identidad como aplicación topológica y que, como aplicación de espacios topológicamente anillados está dado por  $v_{\alpha\beta}^{\#} := u_{\alpha\beta}^{\#} - \phi_{\alpha\beta} \circ \widehat{d}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}|_{\mathfrak{U}_{\alpha\beta}}$ , verifica:

- $v_{\alpha\beta}$  es un isomorfismo de  $\mathfrak{Y}$ -esquemas formales (por 4.2.2.3)
- $v_{\alpha\gamma}^{-1}|_{\mathfrak{U}_{\beta\gamma} \cap \mathfrak{U}_{\gamma\alpha}} \circ v_{\beta\gamma}|_{\mathfrak{U}_{\beta\alpha} \cap \mathfrak{U}_{\beta\gamma}} \circ v_{\alpha\beta}|_{\mathfrak{U}_{\alpha\beta} \cap \mathfrak{U}_{\alpha\gamma}} = 1_{\mathfrak{U}_{\alpha\beta} \cap \mathfrak{U}_{\alpha\gamma}}$ , para cualesquiera  $\alpha, \beta, \gamma$  tales que  $\mathfrak{U}_{\alpha\beta\gamma,0} \neq \emptyset$  (por (4.2.4.4) y (4.2.4.5))
- $v_{\alpha\alpha} = 1_{\mathfrak{U}_{\alpha}}$  y  $v_{\alpha\beta}^{-1} = v_{\beta\alpha}$

Entonces los  $\mathfrak{Y}$ -esquemas formales  $\mathfrak{U}_{\alpha}$  se recolectan en un levantamiento liso  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  de  $\mathfrak{X}_0$  a través de los morfismos de pegado  $v_{\alpha\beta}$ . □

**COROLARIO 4.2.5.** *En las hipótesis de la Proposición 4.2.4, si  $f_0$  e  $\mathfrak{Y}$  están en  $\text{Sfn}_{\text{af}}$ , existe un levantamiento de  $\mathfrak{X}_0$  sobre  $\mathfrak{Y}$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Aplicando [AJL1, Corollary 3.1.8] se tiene que

$$H^2(\mathfrak{X}_0, \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_0}}(\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}_0/\mathfrak{Y}_0}^1, f_0^*\mathcal{I})) = 0$$

y entonces el resultado es consecuencia de la proposición anterior. □

**CUESTIÓN ABIERTA 2.** Si  $\mathfrak{X}_0$  no es separado, el argumento empleado en la demostración de la Proposición 4.2.4 no es válido. Conjeturamos que una construcción adecuada del complejo cotangente en  $\text{Sfn}$  proporcionaría un argumento válido en general.

<sup>1</sup>Dado  $\mathfrak{X}$  un esquema formal separado en  $\text{Sfn}$  y  $\mathcal{F}$  un haz de grupos abelianos sobre  $\mathfrak{X}$  utilizando [AJL1, Corollary 3.1.8] y [H1, Ch. III, Exercise 4.11] se tiene que  $\check{H}^i(\mathfrak{X}, \mathcal{F}) = H^i(\mathfrak{X}, \mathcal{F})$ , para todo  $i > 0$ .



## CAPÍTULO 5

### Teorema de descomposición

Dado  $X$  un esquema liso y propio sobre un cuerpo  $k$  de característica cero, en [DI] Deligne e Illusie demuestran con métodos algebraicos la degeneración de la sucesión espectral de Hodge a De Rham  $E_1^{pq} = H^q(X, \Omega_{X/k}^p) \Rightarrow H_{DR}^{p+q}(X/k)$ , así como el Teorema de anulación de Kodaira-Akizuki-Nakano cuando  $X$  es liso y proyectivo. Las demostraciones de ambos resultados se reducen a probar los análogos cuando  $k$  es un cuerpo perfecto de característica  $p$ ,  $\dim(X) < p$ ,  $X \rightarrow \text{Spec}(k)$  es liso, propio (proyectivo en el Teorema de anulación) y admite un levantamiento liso sobre  $W_2(k)$  (el anillo de vectores de Witt de longitud 2). Y en este caso, ambos son consecuencia inmediata del Teorema de finitud de Grothendieck (cf. [EGA III<sub>1</sub>, §3]) y de la descomposición del complejo  $F_*\Omega_{X/k}^\bullet$  donde  $F$  es el morfismo relativo de Frobenius de  $X$  sobre  $k$ . El objetivo de este capítulo, motivado por el hecho de que un esquema (no liso)  $Z$  embebible en esquema liso  $X$  proporciona un esquema formal liso  $\widehat{X} = X/Z$  sobre  $k$  con espacio topológico subyacente  $Z$ , es extender el Teorema de descomposición a la categoría de esquemas formales localmente noetherianos (Teorema 5.3.3).

Para la elaboración de una gran parte de este capítulo nos hemos basado en la exposición hecha por Illusie en [I, §3 y §5] en la que se presentan de modo simple y didáctico los resultados obtenidos previamente en [DI]. Todas las cuestiones relativas a lisitud y a levantamientos en Sfn necesarias para el desarrollo de este capítulo, han sido estudiadas previamente en los Capítulos 2, 3 y 4.

#### 5.1. El complejo de De Rham

Algunos autores como Hartshorne dan la definición del complejo de De Rham para esquemas formales algebraizables por esquemas lisos. En concreto, dado  $X$  un esquema liso sobre  $\mathbb{C}$  y  $Z \subset X$  un subesquema cerrado, en [H2, Chapter I, §7] Hartshorne define el complejo de De Rham de  $X/Z$  como la completión del complejo de De Rham de  $X$  a lo largo de  $Z$ . Sin embargo, no hemos encontrado ninguna referencia bibliográfica en la que se haga un estudio general del complejo de De Rham en Sfn. En esta sección definimos el complejo de De Rham en toda generalidad para un morfismo  $\mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$  en Sfn de pseudo tipo finito y estudiamos algunas de sus propiedades fundamentales que serán utilizadas en las secciones siguientes.

DEFINICIÓN 5.1.1. Sea  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  un morfismo en  $\mathbf{Sfn}$ . Para todo  $i \in \mathbb{Z}$ , el haz de  $i$ -diferenciales de  $\mathfrak{X}$  relativo a  $\mathfrak{Y}$ ,  $\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^i$ , es el haz de  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -Módulos asociado al prehaz dado localmente por  $(\bigwedge^i \widehat{\Omega}_{A/B}^1)^\Delta$ , para cualesquiera  $\mathfrak{U} = \mathrm{Spf}(A) \subset \mathfrak{X}$  y  $\mathfrak{V} = \mathrm{Spf}(B) \subset \mathfrak{Y}$  abiertos con  $f(\mathfrak{U}) \subset \mathfrak{V}$ .

Se verifica que  $\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^0 = \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$  y  $\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^i = 0$ , para todo  $i < 0$ .

5.1.2. Si  $\mathrm{Spf}(A) \rightarrow \mathrm{Spf}(B)$  está en  $\mathbf{Sfn}_{\mathrm{af}}$ , resulta que el haz de  $i$ -diferenciales de  $\mathfrak{X}$  relativo a  $\mathfrak{Y}$  es

$$\left(\bigwedge^i \widehat{\Omega}_{A/B}^1\right)^\Delta$$

En particular, si  $X = \mathrm{Spec}(A) \xrightarrow{f} Y = \mathrm{Spec}(B)$  está en  $\mathbf{Sch}_{\mathrm{af}}$  se verifica que  $\Omega_{X/Y}^i = \widehat{\bigwedge^i \Omega_{A/B}^1}$ .

Si  $X \xrightarrow{f} Y$  es un morfismo en  $\mathbf{Sch}$ , entonces  $\Omega_{X/Y}^i$  es un  $\mathcal{O}_X$ -Módulo cuasicohérente. Sin embargo, sólo tenemos una buena descripción del haz de  $i$ -diferenciales en  $\mathbf{Sfn}$  si nos restringimos a la clase de los morfismos de pseudo tipo finito:

PROPOSICIÓN 5.1.3. Si  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  es un morfismo en  $\mathbf{Sfn}$  de pseudo tipo finito, entonces para todo  $i$ ,  $\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^i \in \mathbf{Coh}(\mathfrak{X})$ .

DEMOSTRACIÓN. Como es una cuestión local, podemos suponer que  $\mathfrak{X}$  e  $\mathfrak{Y} = \mathrm{Spf}(B)$  son afines y entonces el resultado es inmediato a partir de la Proposición 2.1.9 teniendo en cuenta [EGA I, (10.10.2.9)].  $\square$

5.1.4. Dado  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  un morfismo en  $\mathbf{Sfn}$  de pseudo tipo finito, denotemos por  $\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^\bullet$  el haz de grupos abelianos graduados definido por

$$\mathfrak{U} \underset{\text{abierto}}{\subset} \mathfrak{X} \rightsquigarrow \Gamma(\mathfrak{U}, \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^\bullet) := \bigoplus_{q \in \mathbb{N}} \Gamma(\mathfrak{U}, \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^q)$$

Para todo  $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{X}$  abierto afín, consideremos en  $\Gamma(\mathfrak{U}, \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^\bullet)$  las operaciones determinadas por:

$$\begin{aligned} \Gamma(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}) \times \Gamma(\mathfrak{U}, \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^j) &\rightarrow \Gamma(\mathfrak{U}, \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^j) \\ (a, w_j) &\rightsquigarrow a \cdot w_j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma(\mathfrak{U}, \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^i) \times \Gamma(\mathfrak{U}, \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^j) &\rightarrow \Gamma(\mathfrak{U}, \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^{i+j}), \\ (w_i, w_j) &\rightsquigarrow w_i \wedge w_j \end{aligned}$$

Con estas operaciones  $\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^\bullet$  es:

- (1) una  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -Álgebra graduada (cf. [B2, Ch. III, §7.1, Definition 1]),

- (2) anticonmutativa, *i.e.*, para todo  $w_i \in \Gamma(\mathfrak{U}, \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^i)$  y para todo  $w_j \in \Gamma(\mathfrak{U}, \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^j)$ , se tiene que  $w_i \wedge w_j = (-1)^{i \cdot j} w_j \wedge w_i$  (*cf.* [B2, Ch. III, §7.3, Proposition 5]) y, por lo tanto, para todo  $w_{2i+1} \in \Gamma(\mathfrak{U}, \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^{2i+1})$ ,  $w_{2i+1} \wedge w_{2i+1} = 0$ .

NOTACIÓN. A partir de ahora y siempre que no exista confusión alguna, dado un morfismo  $\mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$  en Sfn (o  $\mathfrak{X}' \rightarrow \mathfrak{Y}'$  en Sfn), escribiremos  $\widehat{d} = \widehat{d}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}$  (o  $\widehat{d}' = \widehat{d}_{\mathfrak{X}'/\mathfrak{Y}'}$ , respectivamente).

5.1.5. Sea  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  un morfismo en Sfn de pseudo tipo finito. Dado  $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{X}$  un abierto afín se tiene que  $\Gamma(\mathfrak{U}, \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^1) = \langle \widehat{d}a_1, \widehat{d}a_2, \dots, \widehat{d}a_k \rangle$  con  $a_1, a_2, \dots, a_k \in \Gamma(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$  (véase 2.1.31). Con lo cual, un elemento  $s \in \Gamma(\mathfrak{U}, \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^i)$  es combinación lineal de elementos de la forma  $a \cdot \widehat{d}a_{k_1} \wedge \widehat{d}a_{k_2} \wedge \dots \wedge \widehat{d}a_{k_i}$  con  $a \in \Gamma(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$ .

5.1.6. Dado un diagrama conmutativo de morfismos de pseudo tipo finito en Sfn,

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{X}' & \xrightarrow{g} & \mathfrak{X} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathfrak{Y}' & \longrightarrow & \mathfrak{Y} \end{array}$$

como consecuencia inmediata de la Proposición 2.1.24 y de [B2, Ch. III, §7.1, Proposition 1] existe un morfismo de  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}$ -Álgebras graduadas

$$g^* \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^\bullet \longrightarrow \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}'/\mathfrak{Y}'}^\bullet$$

determinado localmente en grado  $i$  por

$$(\widehat{d}a_1 \wedge \widehat{d}a_2 \wedge \dots \wedge \widehat{d}a_i) \otimes 1 \rightsquigarrow \widehat{d}'g(a_1) \wedge \widehat{d}'g(a_2) \wedge \dots \wedge \widehat{d}'g(a_i)$$

para cualesquiera  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \Gamma(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$  con  $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{X}$  un abierto afín (equivalentemente existe un morfismo de  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -Álgebras graduadas  $\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^\bullet \longrightarrow g_* \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}'/\mathfrak{Y}'}^\bullet$  dado localmente por  $\widehat{d}a_1 \wedge \widehat{d}a_2 \wedge \dots \wedge \widehat{d}a_i \rightsquigarrow \widehat{d}'g(a_1) \wedge \widehat{d}'g(a_2) \wedge \dots \wedge \widehat{d}'g(a_i)$  para cualesquiera  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \Gamma(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$  con  $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{X}$  un abierto afín).

Si el diagrama es cartesiano, el morfismo anterior es un isomorfismo.

5.1.7. Sea  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  un morfismo liso en Sfn tal que, para todo  $x \in \mathfrak{X}$ ,  $\dim_x f = n$ . Entonces:

- (1) El  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -Módulo  $\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^i$  es localmente libre de rango constante

$$\text{rg } \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^i = \binom{n}{i}, \text{ para todo } 0 \leq i \leq n$$

En particular,  $\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^n$  es un  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -Módulo inversible y  $\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^i = 0$ , para todo  $i > n$ . Para probarlo podemos suponer que  $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A) \xrightarrow{f} \mathfrak{Y} = \mathrm{Spf}(B)$  es un morfismo liso en  $\mathrm{Sfn}_{\mathrm{af}}$  y que  $\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^1 = (\widehat{\Omega}_{A/B}^1)^\Delta$  con  $\widehat{\Omega}_{A/B}^1$  un  $A$ -módulo localmente libre de rango  $\dim_x f = n$ , para todo  $x \in \mathfrak{X}$  (véase la Proposición 2.3.5 y el Corolario 3.2.10). Entonces por [EGA I, (10.10.8.6)] se tiene que  $\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^i$  es un  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -Módulo localmente libre y es evidente que  $\mathrm{rg} \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^i = \binom{n}{i}$ , para todo  $0 \leq i \leq n$  (cf. [B2, Ch. III, §7.8, Corollary 1]).

- (2) Si  $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A) \xrightarrow{f} \mathfrak{Y} = \mathrm{Spf}(B)$  es un morfismo de esquemas formales afines,  $x \in \mathfrak{X}$ ,  $A \xrightarrow{\widehat{d}} \widehat{\Omega}_{A/B}^1$  es la derivación canónica completa de  $A$  sobre  $B$  y  $\{\widehat{d}a_1, \widehat{d}a_2, \dots, \widehat{d}a_n\}$  es una base de  $\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^1$  en  $x$ , entonces

$$\{\widehat{d}a_{i_1} \wedge \widehat{d}a_{i_2} \wedge \dots \wedge \widehat{d}a_{i_r} / 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n\}$$

es una base de  $\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^r$  en  $x$  (véase [B2, Ch. III, §7.8, Theorem 1]).

PROPOSICIÓN 5.1.8. *Sea  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  un morfismo en  $\mathrm{Sfn}$  de pseudo tipo finito. Entonces existe un único endomorfismo*

$$\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^\bullet \xrightarrow{\widehat{d}^\bullet} \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^\bullet$$

de  $\mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$ -Módulos graduados de grado 1 tal que:

- (1)  $\widehat{d}^0 = \widehat{d}$ ,
- (2)  $\widehat{d}^{i+1} \circ \widehat{d}^i = 0$ , para todo  $i \in \mathbb{N}$  y
- (3) dado  $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{X}$  abierto,  $w_i \in \Gamma(\mathfrak{U}, \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^i)$  e  $w_j \in \Gamma(\mathfrak{U}, \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^j)$ ,

$$\widehat{d}^{i+j}(w_i \wedge w_j) = \widehat{d}^i(w_i) \wedge w_j + (-1)^i w_i \wedge \widehat{d}^j(w_j)$$

para cualesquiera  $i, j \in \mathbb{N}$ .

DEMOSTRACIÓN. En primer lugar veamos que  $\widehat{d}^\bullet$  es único en las condiciones del teorema. Para ello, supongamos que existe  $\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^\bullet \xrightarrow{\delta^\bullet} \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^\bullet$  otro endomorfismo de  $\mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$ -Módulos graduados de grado 1 verificando (1), (2) y (3). Razonando por inducción se comprueba que:

$$\begin{aligned} \delta^i(a \cdot \widehat{d}a_{k_1} \wedge \widehat{d}a_{k_2} \wedge \dots \wedge \widehat{d}a_{k_i}) = \\ \widehat{d}a \wedge \widehat{d}a_{k_1} \wedge \widehat{d}a_{k_2} \wedge \dots \wedge \widehat{d}a_{k_i} = \widehat{d}^i(a \cdot \widehat{d}a_{k_1} \wedge \widehat{d}a_{k_2} \wedge \dots \wedge \widehat{d}a_{k_i}) \end{aligned}$$

para todo  $a_1, a_2, \dots, a_k \in \Gamma(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$  y para todo  $a \in \Gamma(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$  con  $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{X}$  un abierto afín. Por lo tanto se tiene que  $\widehat{d}^\bullet = \delta^\bullet$ .

Para demostrar la existencia, por lo probado antes podemos suponer que  $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A) \xrightarrow{f} \mathfrak{Y} = \mathrm{Spf}(B)$  es un morfismo de pseudo tipo finito en  $\mathrm{Sfn}_{\mathrm{af}}$ , que  $\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^i = (\Omega_{A/B}^i)^\Delta$ , donde  $\Omega_{A/B}^i := \bigwedge^i \Omega_{A/B}^1$  para todo  $i$  y que  $J \subset A$  es

un ideal de definición. Si  $\Omega_{A/B}^\bullet = (\Omega_{A/B}^\bullet, d^\bullet)$  es el complejo<sup>1</sup> de De Rham de  $A$  relativo a  $B$ , para todo  $i$  se verifica que  $d^i(J^{n+1} \cdot \Omega_{A/B}^i) \subset J^n \cdot \Omega_{A/B}^i$ , y se define  $\widehat{d}^i := (d^i)^\Delta$ . Para cada  $i \in \mathbb{N}$ , se tiene que  $\widehat{d}^i(a \cdot \widehat{d}a_1 \wedge \dots \wedge \widehat{d}a_i) = \widehat{d}a \wedge \widehat{d}a_1 \wedge \dots \wedge \widehat{d}a_i$  para cualesquiera  $a, a_1, a_1, \dots, a_i \in A$ , y se comprueba fácilmente que el morfismo  $\widehat{d}^\bullet := (\widehat{d}^i)_{i \in \mathbb{N}}$  verifica las condiciones del enunciado.  $\square$

DEFINICIÓN 5.1.9. Sea  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  un morfismo en Sfn de pseudo tipo finito. Con las notaciones de la proposición anterior,

$$(\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^\bullet, \widehat{d}^\bullet) : 0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \xrightarrow{\widehat{d}} \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^1 \xrightarrow{\widehat{d}^1} \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^2 \xrightarrow{\widehat{d}^2} \dots \xrightarrow{\widehat{d}^{k-1}} \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^k \xrightarrow{\widehat{d}^k} \dots$$

es un complejo de  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -Módulos coherentes y se denomina *complejo de De Rham de  $\mathfrak{X}$  relativo a  $\mathfrak{Y}$* . Abreviadamente lo denotaremos por  $\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^\bullet$ .

Observemos que si  $X \xrightarrow{f} Y$  es un morfismo de tipo finito en Sch, se verifica que  $\widehat{\Omega}_{X/Y}^\bullet = \Omega_{X/Y}^\bullet$ .

Sea  $X \xrightarrow{f} \text{Spec}(\mathbb{C})$  un morfismo liso en Sch,  $Z \subset X$  un subesquema cerrado y denotemos por  $\widehat{X}$  la compleción de  $X$  a lo largo de  $Z$ . El complejo de De Rham de  $\widehat{X}$  relativo a  $\mathbb{C}$  definido arriba,  $\widehat{\Omega}_{\widehat{X}/\mathbb{C}}^\bullet$ , coincide con el dado por Hartshorne en [H2, Chapter I, §7].

5.1.10. Dado  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  un morfismo liso en Sfn tal que, para todo  $x \in \mathfrak{X}$ ,  $\dim_x f = n$  de 5.1.7 se deduce que  $\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^\bullet$  es un complejo acotado en  $[0, n]$  cuyos objetos  $\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^i$  son  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -Módulos localmente libres.

LEMA 5.1.11. Dado un diagrama conmutativo de morfismos de pseudo tipo finito en Sfn

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{X}' & \xrightarrow{g} & \mathfrak{X} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathfrak{Y}' & \longrightarrow & \mathfrak{Y} \end{array}$$

el morfismo de Álgebras graduadas  $\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^\bullet \rightarrow g_* \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}'/\mathfrak{Y}'}^\bullet$  dado en 5.1.6 respeta la diferencial, i.e. es un homomorfismo.

<sup>1</sup>Dada  $A$  una  $B$ -álgebra el complejo de De Rham de  $A$  relativo a  $B$  es el complejo de  $B$ -módulos

$$(\Omega_{A/B}^\bullet, d^\bullet) : 0 \rightarrow A \xrightarrow{d^0} \Omega_{A/B}^1 \xrightarrow{d^1} \Omega_{A/B}^2 \xrightarrow{d^2} \dots \xrightarrow{d^{k-1}} \Omega_{A/B}^k \xrightarrow{d^k} \dots$$

donde:

- Si  $d_{A/B}$  es la derivación canónica de  $A$  sobre  $B$ , entonces  $d^0 = d_{A/B}$ .
- Para cualesquiera  $i, j$  y para cualesquiera  $w_i \in \Omega_{A/B}^i, w_j \in \Omega_{A/B}^j$ ,

$$d^{i+j}(w_i \wedge w_j) = d^i(w_i) \wedge w_j + (-1)^i w_i \wedge d^j(w_j)$$

DEMOSTRACIÓN. Se deduce de 5.1.6 (véase la definición de  $\widehat{d}^\bullet$  y  $\widehat{d}'^\bullet$ ).  $\square$

## 5.2. El morfismo de Frobenius y el isomorfismo de Cartier

Es conocido que una de las ventajas de trabajar con esquemas de característica  $p$  es que se disponen de técnicas extra como son el morfismo de Frobenius (cf. [SGA 5, XV 1]) y el isomorfismo de Cartier (cf. [C] y [K]). Para una lectura rápida y clara de estas técnicas recomendamos al lector la exposición hecha por Illusie en [I, §3].

En esta sección extendemos el estudio del morfismo de Frobenius y el isomorfismo de Cartier a la categoría  $\mathbf{Sfn}$ . Al igual a lo que ocurría en capítulos anteriores, a pesar de la relación entre  $\mathbf{Sfn}$  y  $\mathbf{Sch}$ , y de que los resultados expuestos aquí generalizan los resultados análogos en  $\mathbf{Sch}$ , nos encontramos con que la mayor parte no pueden ser deducidos de éstos. La causa principal es el hecho de que la litud de un morfismo  $f = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} f_n$

(no ádico) en  $\mathbf{Sfn}$  no implica la de los morfismos  $f_n$ .

A partir de ahora y, hasta el final del trabajo,  $p$  denotará un número primo y  $\mathbb{F}_p$  el cuerpo  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ .

DEFINICIÓN 5.2.1. Un esquema formal  $\mathfrak{X}$  en  $\mathbf{Sfn}$  se dice que es de *característica  $p$*  si  $p \cdot \mathcal{O}_{\mathfrak{X}} = 0$ , es decir, si para todo  $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{X}$  abierto,  $p \cdot \Gamma(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}) = 0$ .

En particular, si  $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$  está en  $\mathbf{Sfn}_{\mathrm{af}}$ ,  $\mathfrak{X}$  es de característica  $p$  si, y sólo si,  $A$  es un anillo de característica  $p$ .

LEMA 5.2.2. *Sea  $\mathfrak{X}$  esquema formal en  $\mathbf{Sfn}$ . Las siguientes condiciones son equivalentes:*

- (1)  $\mathfrak{X}$  es de característica  $p$ .
- (2) El morfismo  $\mathfrak{X} \xrightarrow{\mathrm{can.}} \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$  se factoriza a través de  $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$ .
- (3) Dado  $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$  Ideal de definición,  $X_n = (\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/\mathcal{J}^{n+1})$  es un esquema de característica  $p$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

DEMOSTRACIÓN. La equivalencia (1) $\Leftrightarrow$ (2) y la implicación (1) $\Rightarrow$ (3) son triviales (véase la Definición 5.2.1). Para probar (3) $\Rightarrow$ (1) podemos suponer  $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$  está en  $\mathbf{Sfn}_{\mathrm{af}}$  y que  $\mathcal{J} = J^\Delta$  con  $J \subset A$  un ideal de definición. Entonces la implicación se reduce a probar que si  $A_n := A/J^{n+1}$  es un anillo de característica  $p$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ , entonces  $A$  es un anillo de característica  $p$ . Efectivamente, por hipótesis  $p \cdot A \subset J^{n+1}$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$  y, por lo tanto, como  $A$  es un anillo  $J$ -ádico  $p \cdot A \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} J^{n+1} = 0$ , de donde sigue el resultado.  $\square$

5.2.3. Sea  $\mathfrak{X}$  un esquema formal en  $\mathbf{Sfn}$  de característica  $p$ . Se define el *endomorfismo de Frobenius absoluto de  $\mathfrak{X}$* , como el endomorfismo  $\mathfrak{X} \xrightarrow{F_{\mathfrak{X}}} \mathfrak{X}$  que es la identidad como aplicación de espacios topológicos y, dado para



todo  $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{X}$  abierto por

$$\Gamma(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}) \underset{a}{\xrightarrow{\Gamma(\mathfrak{U}, F_{\mathfrak{X}}) = ()^p}} \Gamma(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}) \underset{a^p}{\rightsquigarrow}$$

Se deduce fácilmente que:

5.2.3.1. Si  $\mathfrak{X} = \text{Spf}(A)$  está en  $\text{Sfn}_{\text{af}}$ , el morfismo de Frobenius absoluto de  $\mathfrak{X}$  se corresponde vía la equivalencia de categorías (1.1.10.1) con el endomorfismo de Frobenius

$$A \rightarrow A \\ a \rightsquigarrow a^p$$

5.2.3.2. Dado  $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$  un Ideal de definición, si  $X_n \xrightarrow{F_{X_n}} X_n$  es el endomorfismo de Frobenius absoluto de  $X_n$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$ , entonces  $F_{\mathfrak{X}} = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} F_{X_n}$ .

PROPIEDAD 5.2.4. Dado  $\mathfrak{X}$  un esquema formal en  $\text{Sfn}$  de característica  $p$ , el endomorfismo de Frobenius absoluto  $\mathfrak{X} \xrightarrow{F_{\mathfrak{X}}} \mathfrak{X}$  es ádico.

DEMOSTRACIÓN. Podemos suponer que  $\mathfrak{X}$  está en  $\text{Sfn}_{\text{af}}$  y, por lo tanto,  $F_{\mathfrak{X}}$  se corresponde vía la equivalencia de categorías (1.1.10.1) con el endomorfismo de anillos  $A \xrightarrow{F_A = ()^p} A$ . Dado  $J \subset A$  un ideal de definición, veamos que  $J^e = \langle F_A(J) \rangle$  es un ideal de definición de  $A$ . Obviamente se verifica que  $J^e \subset J$ . Veamos que existe  $l \in \mathbb{N}$  tal que  $J^l \subset J^e$ . Para ello, sea  $n$  el cardinal de un conjunto de generadores de  $J$ . Si  $n = 1$ , basta tomar  $l = p$  y entonces  $J^p = J^e$ . Si  $n > 1$ , pongamos  $l = n \cdot p - 1$ . En efecto, si  $J = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ , unos generadores de  $J^l$  son de la forma  $a_1^{l(1)} \cdot a_2^{l(2)} \cdot \dots \cdot a_n^{l(n)}$  con  $l(1) + l(2) + \dots + l(n) = l$ . Como  $l = n \cdot p - 1$ , en cada colección de enteros  $l(1), l(2), \dots, l(n)$  tal que  $l(1) + l(2) + \dots + l(n) = l$  existe uno mayor o igual que  $p$ , de donde se sigue que  $J^l \subset J^e$ .  $\square$

PROPIEDAD 5.2.5. Dado  $\mathfrak{X}$  un esquema formal en  $\text{Sfn}$  de característica  $p$ , el endomorfismo de Frobenius absoluto  $\mathfrak{X} \xrightarrow{F_{\mathfrak{X}}} \mathfrak{X}$  es un homeomorfismo universal (es decir, es un homeomorfismo y para todo morfismo  $\mathfrak{Z} \rightarrow \mathfrak{X}$  en  $\text{Sfn}$ , el morfismo obtenido por cambio de base  $\mathfrak{X} \times \mathfrak{Z} \rightarrow \mathfrak{Z}$  es un homeomorfismo).

DEMOSTRACIÓN. Dado  $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$  un Ideal de definición, por 5.2.3.2 se tiene que  $F_{\mathfrak{X}} = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} F_{X_n}$  donde  $X_n \xrightarrow{F_{X_n}} X_n$  es el endomorfismo de Frobenius absoluto de  $X_n$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Se tiene que  $F_{X_n}$  es un homeomorfismo universal (véase [SGA 5, Exposé XV, §1]) y, aplicando 1.1.21 y que  $(F_{\mathfrak{X}})_{\text{top}} = (F_{X_n})_{\text{top}}$  se deduce la propiedad.  $\square$

5.2.6. Dado  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  un morfismo en  $\text{Sfn}$  con  $\mathfrak{Y}$  un esquema formal de característica  $p$ , se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{X} & \xrightarrow{F_{\mathfrak{X}}} & \mathfrak{X} \\ f \downarrow & & \downarrow f \\ \mathfrak{Y} & \xrightarrow{F_{\mathfrak{Y}}} & \mathfrak{Y} \end{array}$$

donde las flechas horizontales son los endomorfismos absolutos de Frobenius de  $\mathfrak{X}$  e  $\mathfrak{Y}$ . Si llamamos  $\mathfrak{X}' = \mathfrak{X} \times_{F_{\mathfrak{Y}}} \mathfrak{Y}$ , existe un único morfismo

$$\mathfrak{X} \xrightarrow{F_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}} \mathfrak{X}'$$

que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} \mathfrak{X} & & & & \\ & \searrow^{F_{\mathfrak{X}}} & & & \\ & & \mathfrak{X}' & \xrightarrow{(F_{\mathfrak{Y}})'} & \mathfrak{X} \\ & \searrow^f & \downarrow f' & & \downarrow f \\ & & \mathfrak{Y} & \xrightarrow{F_{\mathfrak{Y}}} & \mathfrak{Y} \end{array} \tag{5.2.6.1}$$

El morfismo  $\mathfrak{X} \xrightarrow{F_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}} \mathfrak{X}'$  se denominará *morfismo de Frobenius relativo de  $\mathfrak{X}$  sobre  $\mathfrak{Y}$*  y, salvo confusión lo denotaremos por  $F$ .

5.2.6.1. Si  $\mathfrak{X} = \text{Spf}(A) \xrightarrow{f} \mathfrak{Y} = \text{Spf}(B)$  está en  $\text{Sfn}_{\text{af}}$  con  $\mathfrak{Y}$  de característica  $p$ , el diagrama (5.2.6.1) se corresponde mediante la equivalencia de categorías (1.1.10.1) con el siguiente diagrama de anillos ádicos noetherianos

$$\begin{array}{ccccc} B & \xrightarrow{F_B=(\ )^p} & B & & \\ f \downarrow & & \downarrow & \searrow^f & \\ A & \xrightarrow{(F_B)'} & B \widehat{\otimes}_{F_B} A & \xrightarrow{F} & A \\ & \searrow^{F_A=(\ )^p} & & & \downarrow \\ & & & & A \end{array}$$

donde  $F(b \widehat{\otimes} a) = a^p \cdot f(b)$  y  $(F_B)'(a) = 1 \widehat{\otimes} a$  siendo  $b \widehat{\otimes} a \in B \widehat{\otimes}_{F_B} A$  la imagen de  $b \otimes a \in B \otimes A$ .

5.2.6.2. Dados  $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$  y  $\mathcal{K} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$  Ideales de definición tales que  $f^*(\mathcal{K})\mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \subset \mathcal{J}$ , si  $X_n \xrightarrow{F_n} X'_n$  es el morfismo de Frobenius relativo de  $X_n$

sobre  $Y_n$ , por 5.2.3.2 y 1.1.21 se tiene que

$$\begin{array}{ccc}
 \mathfrak{X} & \begin{array}{ccc} \xrightarrow{F} & \mathfrak{X}' & \xrightarrow{F_{\mathfrak{X}}} \\ \searrow f & \downarrow f & \downarrow f \\ \mathfrak{Y} & \xrightarrow{F_{\mathfrak{Y}}} & \mathfrak{Y} \end{array} & = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} \left( \begin{array}{ccc} X_n & \begin{array}{ccc} \xrightarrow{F_n} & X'_n & \xrightarrow{F_{X_n}} \\ \searrow f_n & \downarrow f_n & \downarrow f_n \\ Y_n & \xrightarrow{F_{Y_n}} & Y_n \end{array} & \end{array} \right)
 \end{array}$$

y, en particular,  $F = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} F_n$ .

**PROPIEDAD 5.2.7.** Dado  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  un morfismo en  $\text{Sfn}$  con  $\mathfrak{Y}$  un esquema formal de característica  $p$ , el morfismo de Frobenius relativo de  $\mathfrak{X}$  sobre  $\mathfrak{Y}$  es ádico.

**DEMOSTRACIÓN.** Consideremos el diagrama (5.2.6.1). El morfismo  $F_{\mathfrak{Y}}$  es ádico (Propiedad 5.2.4) y por cambio de base (Propiedad 1.2.6.(3)), se tiene que el morfismo  $\mathfrak{X}' \xrightarrow{(F_{\mathfrak{Y}})'} \mathfrak{X}$  es ádico. Entonces, la Propiedad 1.2.6.(2) implica que  $F$  es un morfismo ádico por serlo  $(F_{\mathfrak{Y}})'$  y  $F_{\mathfrak{X}}$  (Propiedad 5.2.4).  $\square$

**PROPIEDAD 5.2.8.** Dado  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  un morfismo en  $\text{Sfn}$  con  $\mathfrak{Y}$  un esquema formal de característica  $p$ , el morfismo de Frobenius relativo de  $\mathfrak{X}$  sobre  $\mathfrak{Y}$  es un homeomorfismo.

**DEMOSTRACIÓN.** Teniendo en cuenta el diagrama (5.2.6.1) se deduce de la Propiedad 5.2.5.  $\square$

5.2.9. Dado  $\mathfrak{Y} = \text{Spf}(B)$  un esquema formal en  $\text{Sfn}$  de característica  $p$ ,  $n > 0$  y  $\mathbb{A}_{\mathfrak{Y}}^n = \text{Spf}(B\{\mathbf{T}\}) \xrightarrow{\pi} \mathfrak{Y}$  la proyección canónica del espacio formal afín, se verifica que:

- (1) Existe un isomorfismo de  $\mathfrak{Y}$ -esquemas formales

$$(\mathbb{A}_{\mathfrak{Y}}^n)' = \mathbb{A}_{\mathfrak{Y}}^n \times_{F_{\mathfrak{Y}}} \mathfrak{Y} \xrightarrow{\Phi} \mathbb{A}_{\mathfrak{Y}}^n$$

definido a través de la equivalencia de categorías (1.1.10.1) por el morfismo

$$\begin{array}{ccc}
 B\{\mathbf{T}\} & \xrightarrow{\Phi} & B\{\mathbf{T}\} \widehat{\otimes}_{F_B} B \\
 \sum_{\nu_i \in \mathbb{N}^n} b_{\nu_i} \mathbf{T}^{\nu_i} & \rightsquigarrow & \sum_{\nu_i \in \mathbb{N}^n} \mathbf{T}^{\nu_i} \widehat{\otimes} b_{\nu_i}
 \end{array}$$

dado por la propiedad universal del anillo de series formales restringidas (cf. [B1, Ch. III, §4.2, Proposition 4]). Comprobemos que  $\Phi$  es un isomorfismo. Si  $B\{\mathbf{T}\} \xrightarrow{G} B\{\mathbf{T}\}$  es el morfismo inducido por  $F_B$ , por la propiedad universal del producto tensor completo

existe un único morfismo  $B\{\mathbf{T}\} \widehat{\otimes}_{F_B} B \xrightarrow{\Psi} B\{\mathbf{T}\}$  tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 B & \xrightarrow{F_B = (\ )^p} & B \\
 \pi \downarrow & & \downarrow \\
 B\{\mathbf{T}\} & \xrightarrow{(F_B)'} & B\{\mathbf{T}\} \widehat{\otimes}_{F_B} B \\
 & \searrow G & \downarrow \Psi \\
 & & B\{\mathbf{T}\}
 \end{array}$$

Entonces  $\Psi(\sum_{\nu_i \in \mathbb{N}^n} b_{\nu_i} \mathbf{T}^{\nu_i} \widehat{\otimes} b) = \sum_{\nu_i \in \mathbb{N}^n} b \cdot b_{\nu_i}^p \mathbf{T}^{\nu_i}$  y resulta que  $\Phi^{-1} = \Psi$ .

- (2) Los morfismos  $F = F_{\mathbb{A}_{\mathfrak{Y}}^n/\mathfrak{Y}}$  y  $(F_{\mathfrak{Y}})'$  vienen dados salvo el isomorfismo  $(\mathbb{A}_{\mathfrak{Y}}^n)' \xrightarrow{\Phi} \mathbb{A}_{\mathfrak{Y}}^n$  por:

$$\begin{array}{ccc}
 B\{\mathbf{T}\} & \xrightarrow{F} & B\{\mathbf{T}\} \\
 \sum_{\nu_i \in \mathbb{N}^n} b_{\nu_i} \mathbf{T}^{\nu_i} & \rightsquigarrow & \sum_{\nu_i \in \mathbb{N}^n} b_{\nu_i} (\mathbf{T}^{\nu_i})^p \\
 \\ 
 B\{\mathbf{T}\} & \xrightarrow{(F_{B\{\mathbf{T}\}})'} & B\{\mathbf{T}\} \\
 \sum_{\nu_i \in \mathbb{N}^n} b_{\nu_i} \mathbf{T}^{\nu_i} & \rightsquigarrow & \sum_{\nu_i \in \mathbb{N}^n} b_{\nu_i}^p \mathbf{T}^{\nu_i}
 \end{array}$$

- (3) El morfismo de Frobenius relativo de  $\mathbb{A}_{\mathfrak{Y}}^n$  sobre  $\mathfrak{Y}$ ,  $\mathbb{A}_{\mathfrak{Y}}^n \xrightarrow{F} (\mathbb{A}_{\mathfrak{Y}}^n)'$ , es finito, plano y  $F_*(\mathcal{O}_{\mathbb{A}_{\mathfrak{Y}}^n})$  es una  $\mathcal{O}_{\mathbb{A}_{\mathfrak{Y}}^n}$ -Álgebra localmente libre de rango  $p^n$ . Así es, a través del morfismo  $F$ ,  $B\{\mathbf{T}\}$  es un  $B\{\mathbf{T}\}$ -módulo libre con base  $\{\prod_{i=1}^n T_i^{m_i}, 0 \leq m_i \leq p-1\}$ .

Dado  $X \xrightarrow{f} Y$  un morfismo étale en  $\mathbf{Sch}$  con  $Y$  de característica  $p$ , se tiene que el morfismo de Frobenius relativo de  $X$  sobre  $Y$  es un isomorfismo (cf. [SGA 5, Exposé XV, §1]). A continuación se generaliza este resultado para la clase de los morfismos étales en  $\mathbf{Sfn}$ .

LEMA 5.2.10. *Dado  $\mathfrak{Y}$  un esquema formal en  $\mathbf{Sfn}$  de característica  $p$ , sea  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  un morfismo étale en  $\mathbf{Sfn}$ . Entonces el morfismo de Frobenius relativo de  $\mathfrak{X}$  sobre  $\mathfrak{Y}$ ,  $\mathfrak{X} \xrightarrow{F} \mathfrak{X}' = \mathfrak{X} \times_{F_{\mathfrak{Y}}} \mathfrak{Y}$ , es un isomorfismo.*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos el diagrama conmutativo (5.2.6.1). El morfismo  $f$  es étale y por cambio de base (Propiedad 2.2.11.(2)) resulta que  $f'$  es étale. Entonces el Corolario 2.2.16 y la Propiedad 5.2.7 implican que  $F$  es étale ádico. Por otra parte, por la Propiedad 5.2.5,  $F_{\mathfrak{X}}$  es un homeomorfismo universal y, por lo tanto, radical (véase la Definición 1.2.25).

Por el Corolario 1.3.17 se tiene que  $F$  es un morfismo radical y aplicando el Teorema 3.4.3 se obtiene que  $F$  es un encaje abierto. Por último, por la Propiedad 5.2.8  $F$  es un homeomorfismo y se concluye que es un isomorfismo.  $\square$

OBSERVACIÓN. El resultado anterior no se puede obtener como consecuencia del resultado análogo en Sch ya que dado  $f = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} f_n$  un morfismo étale en Sfn en general no se verifica que cada uno de los morfismos de esquemas  $f_n$  sea étale (véase el Ejemplo 3.3.4).

En 5.2.9.3 se ha visto que dado  $\mathfrak{Y}$  en Sfn de característica  $p$  y  $n > 0$ , el morfismo de Frobenius relativo  $\mathbb{A}_{\mathfrak{Y}}^n \xrightarrow{F} \mathbb{A}_{\mathfrak{Y}}^n$  de  $\mathbb{A}_{\mathfrak{Y}}^n$  sobre  $\mathfrak{Y}$  es finito y plano y que  $F_* \mathcal{O}_{\mathbb{A}_{\mathfrak{Y}}^n}$  es una  $\mathcal{O}_{\mathbb{A}_{\mathfrak{Y}}^n}$ -Álgebra localmente libre de rango  $p^n$ . En la Proposición 5.2.12 se generaliza este hecho cuando  $\mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$  es un morfismo liso en Sfn de dimensión relativa constante e igual a  $n$ . Para probarlo necesitamos algunos resultados previos.

PROPOSICIÓN 5.2.11. *Dado un diagrama cartesiano en Sfn*

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{X}' & \xrightarrow{f'} & \mathfrak{Y}' \\ g' \downarrow & & \downarrow g \\ \mathfrak{X} & \xrightarrow{f} & \mathfrak{Y} \end{array}$$

con  $f$  un morfismo finito, si  $\mathcal{F} \in \text{Coh}(\mathfrak{X})$  entonces el morfismo canónico de  $\mathcal{O}_{\mathfrak{Y}\mathfrak{Y}}$ -Módulos

$$f'_*(g'^*\mathcal{F}) \rightarrow g^*(f_*\mathcal{F}) \tag{5.2.11.2}$$

es un isomorfismo.

DEMOSTRACIÓN. Por cambio de base (Propiedad 1.3.4.(3)) se tiene que  $f'$  también es un morfismo finito. Entonces por el teorema de finitud para morfismos finitos en Sfn (cf. [EGA III<sub>1</sub>, (4.8.6)]) resulta que  $f'_*(g'^*\mathcal{F})$  y  $g^*(f_*\mathcal{F})$  son  $\mathcal{O}_{\mathfrak{Y}\mathfrak{Y}}$ -Módulos coherentes. Como es una cuestión local en la base, podemos suponer que  $\mathfrak{Y}' = \text{Spf}(B') \xrightarrow{g} \mathfrak{Y} = \text{Spf}(B)$  está en Sfn<sub>af</sub>, y que  $\mathfrak{X}' = \text{Spf}(A') \xrightarrow{g'} \mathfrak{X} = \text{Spf}(A)$  es un morfismo de esquemas formales afines con  $A$  un  $B$ -módulo de tipo finito y  $A' = B' \otimes_B A$  un  $A$ -módulo de tipo finito. Aplicando la equivalencia de categorías dada por el funtor  $\Delta$  se tiene que existe un  $A$ -módulo finitamente generado  $M$  tal que  $\mathcal{F} = M^\Delta$  y, por lo dicho antes se tiene que  $M$  es un  $B$ -módulo de tipo finito. El morfismo (5.2.11.2) se corresponde vía la equivalencia de categorías dada por el funtor  $\Delta$  (véase [EGA I, (10.10.5)]) con el isomorfismo canónico de  $B'$ -módulos finitamente generados  $A' \otimes_A M \rightarrow B' \otimes_B M$ .  $\square$

PROPOSICIÓN 5.2.12. *Dado  $\mathfrak{Y}$  un esquema formal en Sfn de característica  $p$ , sea  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  un morfismo liso en Sfn de dimensión relativa constante*

$n$ . Entonces, el endomorfismo de Frobenius relativo de  $\mathfrak{X}$  sobre  $\mathfrak{Y}$ ,  $\mathfrak{X} \xrightarrow{F} \mathfrak{X}'$ , es finito, plano y  $F_*\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$  es una  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}$ -Álgebra localmente libre de rango  $p^n$ .

DEMOSTRACIÓN. La Proposición 3.2.9 implica que para cada  $x \in \mathfrak{X}$ , existe  $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{X}$  abierto con  $x \in \mathfrak{U}$  tal que  $f|_{\mathfrak{U}}$  se factoriza en  $\mathfrak{U} \xrightarrow{g} \mathbb{A}_{\mathfrak{Y}}^n \xrightarrow{\pi} \mathfrak{Y}$  donde  $g$  es étale,  $\pi$  es la proyección canónica y  $n = \text{rg}(\widehat{\Omega}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},x}/\mathcal{O}_{\mathfrak{Y},f(x)}}^1)$ . Para simplificar pongamos  $\mathfrak{U} = \mathfrak{X}$ . Considerando el diagrama (5.2.6.1) para los morfismos  $g$ ,  $\pi$  y  $f$  se tiene el siguiente diagrama conmutativo en  $\text{Sfn}$

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathfrak{X} & \xrightarrow{F_{\mathfrak{X}}} & \mathfrak{X} & & \\
 \downarrow g & \searrow F & \downarrow g & \square_2 & \\
 & & \mathfrak{X}' & & \\
 & \diamond_1 & \downarrow g' & \diamond_3 & \\
 \mathbb{A}_{\mathfrak{Y}}^n & \xrightarrow{F_{\mathbb{A}_{\mathfrak{Y}}^n}} & \mathbb{A}_{\mathfrak{Y}}^n & \xrightarrow{F_{\mathbb{A}_{\mathfrak{Y}}^n}/\mathfrak{Y}} & \mathbb{A}_{\mathfrak{Y}}^n \\
 \downarrow \pi & \searrow & \downarrow \pi & \diamond_4 & \downarrow \pi \\
 & & \mathbb{A}_{\mathfrak{Y}}^n & & \\
 & & \downarrow & & \\
 \mathfrak{Y} & \xrightarrow{F_{\mathfrak{Y}}} & \mathfrak{Y} & & \\
 & \searrow 1_{\mathfrak{Y}} & \downarrow & \diamond_4 & \searrow F_{\mathfrak{Y}} \\
 & & \mathfrak{Y} & & 
 \end{array}$$

donde:

- las flechas horizontales son los endomorfismos de Frobenius absolutos de  $\mathfrak{X}$ ,  $\mathbb{A}_{\mathfrak{Y}}^n$  e  $\mathfrak{Y}$ .
- $\mathfrak{X}' = \mathfrak{X} \times_{F_{\mathfrak{Y}}} \mathfrak{Y}$  y  $\diamond_4$  es un cuadrado cartesiano (obsérvese que, entonces  $\diamond_3$  es un cuadrado cartesiano).

Como  $g$  es étale, por el Lema 5.2.10 se tiene que  $\square_2$  es un cuadrado cartesiano y, como  $\diamond_3$  es un cuadrado cartesiano se deduce que  $\diamond_1$  es un cuadrado cartesiano. Por otro lado, en 5.2.9.3 hemos visto que  $F_{\mathbb{A}_{\mathfrak{Y}}^n}/\mathfrak{Y}$  es finito, plano y que  $(F_{\mathbb{A}_{\mathfrak{Y}}^n}/\mathfrak{Y})_*\mathcal{O}_{\mathbb{A}_{\mathfrak{Y}}^n}$  es una  $\mathcal{O}_{\mathbb{A}_{\mathfrak{Y}}^n}$ -Álgebra localmente libre de rango  $p^n$  con base  $\{\prod_{i=1}^n T_i^{m_i}, 0 \leq m_i \leq p-1\}$ . Entonces por cambio de base (Propiedad 1.3.4.(4) y Propiedad 1.4.4.(2)) se tiene que  $F$  es finito y plano. Además, de

la Proposición 5.2.11 resulta que:

$$F_*\mathcal{O}_{\mathfrak{X}} = F_*g^*\mathcal{O}_{\mathbb{A}_{\mathfrak{Y}}^n} = (g')^*((F_{\mathbb{A}_{\mathfrak{Y}}^n}/\mathfrak{y})_*\mathcal{O}_{\mathbb{A}_{\mathfrak{Y}}^n})$$

y, por lo tanto,  $F_*\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$  es una  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}$ -Álgebra localmente libre de rango  $p^n$  con base  $\{(g')^*(\prod_{i=1}^n T_i^{m_i}), 0 \leq m_i \leq p-1\}$ .  $\square$

**COROLARIO 5.2.13.** *Sea  $\mathfrak{Y}$  un esquema formal en Sfn de característica  $p$  y  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  un morfismo liso de dimensión relativa constante  $n$ . Entonces  $F_*\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^i$  es un  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}$ -módulo localmente libre de rango  $p^n \cdot \binom{n}{i}$ , para todo  $0 \leq i \leq n$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Sea  $0 \leq i \leq n$ . Por 5.1.7.1 se tiene que  $\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^i$  es un  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -Módulo localmente libre de rango  $\binom{n}{i}$  y entonces, el resultado se deduce de la Proposición 5.2.12.  $\square$

Una de las herramientas técnicas más importantes para el estudio diferencial de esquemas de característica  $p$  es el isomorfismo de Cartier:

**TEOREMA 5.2.14.** [**K**, (7.2)] *Sea  $X \xrightarrow{f} Y$  un morfismo liso en Sch con  $Y$  de característica  $p$  y  $X \xrightarrow{F} X'$  el morfismo de Frobenius relativo de  $X$  sobre  $Y$ . Entonces existe un único isomorfismo de  $\mathcal{O}_{X'}$ -Álgebras graduadas*

$$\bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \Omega_{X'/Y}^i \xrightarrow{\gamma} \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathcal{H}^i F_* \Omega_{X/Y}^\bullet \quad (5.2.14.3)$$

tal que  $\gamma^0$  es el morfismo canónico  $\mathcal{O}_{X'} \rightarrow F_*\mathcal{O}_X$  y  $\gamma^1$  viene dado localmente por  $1 \otimes d(a) \rightsquigarrow [a^{p-1}d(a)]$ .

El morfismo  $\gamma$  se llama isomorfismo de Cartier.

En el Teorema 5.2.18 extendemos el isomorfismo de Cartier en Sch (Teorema 5.2.14) a los morfismos lisos en Sfn de característica  $p$ . A pesar de que en la prueba del isomorfismo de Cartier en Sfn se usa el isomorfismo de Cartier para morfismos lisos en Sch y de que la estructura de su demostración no presenta ninguna diferencia substancial con la demostración del Teorema 5.2.14 dada en [**K**, loc. cit.], la prueba no se puede deducir de este, ya que, dado un morfismo  $f = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} f_n$  en Sfn liso en general los morfismos  $f_n$  no son lisos (véase el Ejemplo 3.2.3).

Antes de formular el isomorfismo de Cartier en Sfn (Teorema 5.2.18) será útil tener en cuenta las siguientes observaciones:

5.2.15. Dado  $\mathfrak{Y}$  un esquema formal en Sfn de característica  $p$  sea  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  un morfismo en Sfn. Para todo  $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{X}$  abierto y para todo  $a \in \Gamma(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$ , se verifica que

$$\widehat{d}(a^p) = p \cdot a^{p-1} \cdot \widehat{d}(a) = 0$$

Entonces aplicando 5.2.6.1 se deduce que:

- (1) El morfismo absoluto de Frobenius de
- $\mathfrak{X}$
- induce el morfismo nulo

$$\begin{array}{ccc} F_{\mathfrak{X}}^* \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^1 & \xrightarrow{0} & \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^1 \\ 1 \otimes \widehat{d}(a) & \rightsquigarrow & \widehat{d}(a^p) = 0 \end{array}$$

- (2) El morfismo de Frobenius relativo de
- $\mathfrak{X}$
- sobre
- $\mathfrak{Y}$
- también induce el morfismo nulo

$$\begin{array}{ccc} F^* \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}'/\mathfrak{Y}}^1 & \xrightarrow{0} & \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^1 \\ \widehat{d}(a) \otimes b \otimes 1 & \rightsquigarrow & \widehat{d}(a^p \cdot b) = b \cdot \widehat{d}(a^p) = 0 \end{array}$$

5.2.16. Dado  $\mathfrak{Y}$  un esquema formal en Sfn de característica  $p$  y  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  un morfismo en Sfn se verifica que  $F_* \widehat{d}^\bullet$  es  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}$ -lineal. Así es, dado  $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{X}$  abierto<sup>2</sup>,  $a \widehat{\otimes} b \in \Gamma(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}'})$  y  $c \in \Gamma(\mathfrak{U}, F_* \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$  resulta que:

$$\begin{aligned} F_* \widehat{d}(a \widehat{\otimes} b \cdot c) &= \widehat{d}(F(a \widehat{\otimes} b) \cdot c) = \widehat{d}(a^p \cdot b \cdot c) = b \cdot \widehat{d}(a^p \cdot c) = \\ &= b \cdot p \cdot a^{p-1} \cdot \widehat{d}(a) \cdot c + b \cdot a^p \cdot \widehat{d}(c) = a \widehat{\otimes} b \cdot F_* \widehat{d}(c) \end{aligned}$$

y, por lo tanto:

- (1)  $F_* \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^\bullet := (F_* \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^\bullet, F_* \widehat{d}^\bullet)$  es un complejo de  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}$ -Módulos.
- (2) Para todo  $i$ ,

$$\mathcal{Z}^i F_* \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^\bullet, \mathcal{B}^i F_* \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^\bullet, \mathcal{H}^i F_* \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^\bullet$$

son  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}$ -Módulos.

- (3) Los haces de grupos abelianos  $\bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathcal{Z}^i F_* \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^\bullet$  y  $\bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathcal{H}^i F_* \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^\bullet$  tienen estructura de  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}$ -Álgebras graduadas anticonmutativas determinada por el producto exterior de modo que los elementos de grado 1 en cada uno de ellos son de cuadrado nulo.

5.2.17. Si  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  es un morfismo liso en Sfn con  $\mathfrak{Y}$  un esquema formal de característica  $p$ , aplicando el Corolario 5.2.13 se tiene que  $F_* \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^\bullet$  es un complejo de  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}$ -Módulos localmente libres de rango finito y, en particular,  $\mathcal{H}^i F_* \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^\bullet \in \text{Coh}(\mathfrak{X}')$ , para todo  $i$ .

TEOREMA 5.2.18. *Sea  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  un morfismo liso en Sfn con  $\mathfrak{Y}$  de característica  $p$  y  $\mathfrak{X} \xrightarrow{F} \mathfrak{X}'$  el morfismo de Frobenius relativo de  $\mathfrak{X}$  sobre  $\mathfrak{Y}$ . Entonces existe un único isomorfismo de  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}$ -Álgebras graduadas*

$$\bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}'/\mathfrak{Y}}^i \xrightarrow{\gamma} \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathcal{H}^i F_* \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^\bullet \quad (5.2.18.4)$$

<sup>2</sup>Recordemos que dados  $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$  en Sfn,  $\mathfrak{X} \xrightarrow{F} \mathfrak{X}'$  el morfismo de Frobenius relativo de  $\mathfrak{X}$  sobre  $\mathfrak{Y}$  y  $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$  y  $\mathcal{K} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$  Ideales de definición tales que  $f^*(\mathcal{K}) \subset \mathcal{J}$ , se verifica que  $(\mathfrak{X})_{top} = (\mathfrak{X}_0)_{top} \cong_{5.2.8} (\mathfrak{X}')_{top} = (\mathfrak{X}')_{top}$  y, por lo tanto, podemos identificar el abierto  $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{X}$ ,  $\mathfrak{X}_0$  con un abierto de  $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{X}'$ ,  $\mathfrak{X}'_0$  que, con un abuso de notación, denotaremos igual.



tal que  $\gamma^0$  es el morfismo canónico  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'} \rightarrow F_*\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$  y  $\gamma^1$  viene dado localmente por  $1 \otimes \widehat{d}(a) \rightsquigarrow [a^{p-1}\widehat{d}(a)]$ .

El morfismo  $\gamma$  se denomina isomorfismo de Cartier.

DEMOSTRACIÓN.

► *Unicidad.* Se deduce del hecho de que  $\bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathcal{H}^i F_* \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^\bullet$  es una  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}$ -Álgebra graduada donde los elementos de grado 1 son de cuadrado nulo (cf. [B2, Ch. III, §7.1, Proposition 1]).

► *Existencia.* Aplicando [B2, loc. cit.] basta dar  $\gamma^0$  y  $\gamma^1$  como en el enunciado del teorema. Para ello consideremos el morfismo  $D$  definido, para cada  $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{X}$  abierto, por

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}) & \xrightarrow{\Gamma(\mathfrak{U}, D)} & \Gamma(\mathfrak{U}, \mathcal{H}^1 F_* \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^\bullet) \\ 1 \widehat{\otimes} a & \rightsquigarrow & [a^{p-1} \widehat{d}(a)] \end{array}$$

Está bien definido ya que:

$$F_* \widehat{d}(a^{p-1} \widehat{d}(a)) = \widehat{d}(a^{p-1}) \wedge \widehat{d}(a) = (p-1)a^{p-2} \widehat{d}(a) \wedge \widehat{d}(a) = 0$$

y, por lo tanto,  $a^{p-1} \widehat{d}(a) \in \Gamma(\mathfrak{U}, \mathcal{Z}^1 F_* \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^\bullet)$ .

Veamos que  $D \in \text{Dercont}_{\mathfrak{Y}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}, \mathcal{H}^1 F_* \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^\bullet)$ . Se comprueba fácilmente que el morfismo  $D$  es continuo. Probemos que es un morfismo de haces de grupos abelianos. Para ello consideremos  $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{X}$  un abierto y  $a_1, a_2 \in \Gamma(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$ . Aplicando formalmente  $\widehat{d}$  a la igualdad

$$(a_1 + a_2)^p = a_1^p + a_2^p + p \cdot \left( \sum_{i=1}^{p-1} \frac{(p-1)!}{i! \cdot (p-i)!} \cdot a_1^i \cdot a_2^{p-i} \right)$$

se deduce que

$$\begin{aligned} p \cdot (a_1 + a_2)^{p-1} \widehat{d}(a_1 + a_2) = \\ p \cdot \left( a_1^{p-1} \widehat{d}(a_1) + a_2^{p-1} \widehat{d}(a_2) + \widehat{d} \left( \sum_{i=1}^{p-1} \frac{(p-1)!}{i! \cdot (p-i)!} \cdot a_1^i \cdot a_2^{p-i} \right) \right) \end{aligned}$$

de donde se sigue que  $D(1 \widehat{\otimes} (a_1 + a_2)) = D(1 \widehat{\otimes} a_1) + D(1 \widehat{\otimes} a_2)$ . Por otro lado,

$$\begin{aligned} D(1 \widehat{\otimes} (a_1 \cdot a_2)) &= [(a_1 \cdot a_2)^{p-1} \widehat{d}(a_1 \cdot a_2)] \\ &= [a_2^p \cdot a_1^{p-1} \widehat{d}(a_1)] + [a_1^p \cdot a_2^{p-1} \widehat{d}(a_2)] \\ &= (1 \widehat{\otimes} a_2) \cdot D(1 \widehat{\otimes} a_1) + (1 \widehat{\otimes} a_1) \cdot D(1 \widehat{\otimes} a_2) \end{aligned}$$

y se concluye que  $D$  es una  $\mathfrak{Y}$ -derivación continua.

Por 5.2.17 se tiene que  $\mathcal{H}^1 F_* \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^\bullet \in \text{Coh}(\mathfrak{X})$  y aplicando el Teorema 2.1.22 resulta que existe un único homomorfismo de  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}$ -Módulos  $\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}'/\mathfrak{Y}}^1 \xrightarrow{\gamma^1}$

$\mathcal{H}^1 F_* \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^\bullet$  tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}'} & \xrightarrow{\widehat{d}} & \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}'/\mathfrak{Y}}^1 \\ D \downarrow & \swarrow \gamma^1 & \\ \mathcal{H}^1 F_* \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^\bullet & & \end{array}$$

Entonces aplicando una vez más [B2, *loc. cit.*] existe un único morfismo de  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}$ -Álgebras graduadas

$$\bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}'/\mathfrak{Y}}^i \longrightarrow \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathcal{H}^i F_* \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^\bullet$$

que en grado 0 y en grado 1 coincide con  $\gamma^0$  y  $\gamma^1$ , respectivamente.

►  $\gamma$  es un isomorfismo. Se hará en tres etapas:

1) Si  $X \xrightarrow{f} Y$  es un morfismo liso en Sch con  $Y$  de característica  $p$ ,  $\gamma$  es el isomorfismo de Cartier en la categoría de esquemas Sch (Teorema 5.2.14).

2) Probemos el resultado para el morfismo de proyección canónico  $\mathbb{A}_{\mathfrak{Y}}^n = \mathbb{A}_{\mathbb{F}_p}^n \times_{\mathbb{F}_p} \mathfrak{Y} \xrightarrow{\pi_{\mathfrak{Y}}} \mathfrak{Y}$ . Considerando el diagrama (5.2.6.1) para los morfismos  $\mathbb{A}_{\mathfrak{Y}}^n \xrightarrow{\pi_{\mathfrak{Y}}} \mathfrak{Y}$  y  $\mathbb{A}_{\mathbb{F}_p}^n \xrightarrow{\pi} \text{Spec}(\mathbb{F}_p)$  y, teniendo en cuenta 5.2.9.(1) se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{A}_{\mathfrak{Y}}^n & \xrightarrow{F} & (\mathbb{A}_{\mathfrak{Y}}^n)' & \xrightarrow{F'} & \mathbb{A}_{\mathfrak{Y}}^n \\ \downarrow \diamond_6 \searrow g \square_5 & & \downarrow \diamond_4 \searrow g' \square_1 & & \downarrow \diamond_3 \searrow g \\ \mathbb{A}_{\mathbb{F}_p}^n & \xrightarrow{F} & (\mathbb{A}_{\mathbb{F}_p}^n)' & \xrightarrow{F'} & \mathbb{A}_{\mathbb{F}_p}^n \\ \downarrow \pi_{\mathfrak{Y}} & & \downarrow \pi'_{\mathfrak{Y}} & & \downarrow \pi_{\mathfrak{Y}} \\ \mathfrak{Y} & \xrightarrow{1_{\mathfrak{Y}}} & \mathfrak{Y} & \xrightarrow{(\ )^p} & \mathfrak{Y} \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi' & & \downarrow \pi \\ \mathbb{F}_p & \xrightarrow{1_{\mathbb{F}_p}} & \mathbb{F}_p & \xrightarrow{(\ )^p} & \mathbb{F}_p \end{array}$$

en Sfn. Los cuadrados  $\square_1$ ,  $\square_2$  y  $\diamond_3$  son cartesianos, por lo tanto el cuadrado  $\diamond_4$  también es cartesiano. Como  $\diamond_6$  es un cuadrado cartesiano resulta que  $\square_5$  también es cartesiano. Aplicando el apartado (1), se tiene el isomorfismo de Cartier asociado al morfismo  $\pi$ :

$$\bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \Omega_{(\mathbb{A}_{\mathbb{F}_p}^n)'/\mathbb{F}_p}^i \xrightarrow{\sim \gamma_{n, \mathbb{F}_p}} \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathcal{H}^i F_* \Omega_{\mathbb{A}_{\mathbb{F}_p}^n/\mathbb{F}_p}^\bullet \quad (5.2.18.5)$$

Ahora bien, la Proposición 2.1.24 implica que  $\Omega_{(\mathbb{A}_{\mathbb{F}_p}^n)'/\mathbb{F}_p}^1 \cong g'^* \widehat{\Omega}_{(\mathbb{A}_{\mathfrak{Y}}^n)'/\mathfrak{Y}}^1$  y, del hecho de que  $g'$  es un morfismo plano (por cambio de base) y del isomorfismo

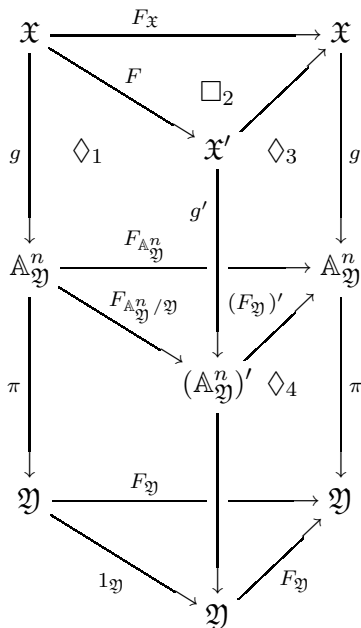
(5.2.18.5) se deduce el isomorfismo

$$\bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \widehat{\Omega}_{(\mathbb{A}_{\mathfrak{Y}}^n)' / \mathfrak{Y}}^i \xrightarrow{\gamma_{n, \mathfrak{Y}}} \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathcal{H}^i g'^* F_* \widehat{\Omega}_{\mathbb{A}_{\mathbb{F}_p}^n / \mathbb{F}_p}^\bullet$$

Por 5.2.9.(3) se tiene que  $F$  es un morfismo finito y entonces, la Proposición 5.2.11 implica que  $g'^* F_* \widehat{\Omega}_{\mathbb{A}_{\mathbb{F}_p}^n / \mathbb{F}_p}^\bullet \cong F_* g^* \widehat{\Omega}_{\mathbb{A}_{\mathbb{F}_p}^n / \mathbb{F}_p}^1$  y se obtiene el isomorfismo de Cartier asociado a  $\pi_{\mathfrak{Y}}$

$$\bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \widehat{\Omega}_{(\mathbb{A}_{\mathfrak{Y}}^n)' / \mathfrak{Y}}^i \xrightarrow{\gamma_{n, \mathfrak{Y}}} \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathcal{H}^i F_* \widehat{\Omega}_{\mathbb{A}_{\mathfrak{Y}}^n / \mathfrak{Y}}^\bullet$$

3) En el caso general, como es una cuestión local por la Proposición 3.2.9 podemos suponer que  $f$  se factoriza en  $\mathfrak{X} \xrightarrow{g} \mathbb{A}_{\mathfrak{Y}}^n \xrightarrow{\pi} \mathfrak{Y}$ , donde  $g$  es étale y  $\pi$  es la proyección canónica. Considerando el diagrama (5.2.6.1) para los morfismos  $g$ ,  $\pi$  y  $f$  se tiene el siguiente diagrama conmutativo en  $\mathbf{Sfn}$



donde, razonando como en la demostración de la Proposición 5.2.12 (se utiliza que  $g$  es étale), se tiene que  $\diamond_1$ ,  $\square_2$ ,  $\diamond_3$  y  $\diamond_4$  son cuadrados cartesianos.

Por el apartado (2), se tiene el isomorfismo de Cartier asociado al morfismo  $\pi_{\mathfrak{Y}}$ :

$$\bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \widehat{\Omega}_{(\mathbb{A}_{\mathfrak{Y}}^n)' / \mathfrak{Y}}^i \xrightarrow{\gamma} \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathcal{H}^i (F_{\mathbb{A}_{\mathfrak{Y}}^n / \mathfrak{Y}})_* \widehat{\Omega}_{\mathbb{A}_{\mathfrak{Y}}^n / \mathfrak{Y}}^\bullet \quad (5.2.18.6)$$

Como  $g$  es étale y  $\diamond_3$  es un cuadrado cartesiano, por cambio de base se tiene que  $g'^* \widehat{\Omega}_{(\mathbb{A}_{\mathfrak{Y}}^n)' / \mathfrak{Y}}^i \cong \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X} / \mathfrak{Y}}^i$

para todo  $i \in \mathbb{Z}$ . La Proposición 2.3.5 implica que  $g'$  es plano y, entonces aplicando  $g'^*$  al isomorfismo (5.2.18.6) se tiene el siguiente isomorfismo

$$\bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}'/\mathfrak{Y}}^i \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathcal{H}^i g'^*(F_{\mathbb{A}_{\mathfrak{Y}}^n/\mathfrak{Y}})_* \widehat{\Omega}_{\mathbb{A}_{\mathfrak{Y}}^n/\mathfrak{Y}}^\bullet$$

Por otra parte,  $g$  es étale y, del Corolario 2.3.8 se deduce que  $g^* \widehat{\Omega}_{\mathbb{A}_{\mathfrak{Y}}^n/\mathfrak{Y}}^i \cong \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^i$  para todo  $i \in \mathbb{Z}$ . Ahora bien, aplicando la Proposición 5.2.11 resulta que para todo  $i$

$$F_* \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^i = F_* g^* \widehat{\Omega}_{\mathbb{A}_{\mathfrak{Y}}^n/\mathfrak{Y}}^i \cong g'^*(F_{\mathbb{A}_{\mathfrak{Y}}^n/\mathfrak{Y}})_* \widehat{\Omega}_{\mathbb{A}_{\mathfrak{Y}}^n/\mathfrak{Y}}^i$$

de donde se deduce que  $\mathcal{H}^i F_* \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^\bullet \cong \mathcal{H}^i g'^*(F_{\mathbb{A}_{\mathfrak{Y}}^n/\mathfrak{Y}})_* \widehat{\Omega}_{\mathbb{A}_{\mathfrak{Y}}^n/\mathfrak{Y}}^\bullet$ .  $\square$

### 5.3. Teorema de descomposición

En esta sección se obtiene un Teorema de descomposición para los morfismos lisos de esquemas formales de característica  $p$  en  $\mathbf{Sfn}$ . El resultado principal es el Teorema 5.3.3. En su demostración nos referiremos constantemente a los resultados obtenidos en el Capítulo 3 y en el Capítulo 4 relativos a la lisitud y a la deformación de esquemas formales, respectivamente, y a las técnicas en característica  $p$  estudiadas en la Sección 5.2.

Para el desarrollo de esta parte supondremos que el lector conoce la teoría de categorías derivadas. En cualquier caso, para el lector no familiarizado con el uso de las categorías derivadas una referencia adecuada es [L].

5.3.1. Antes de enunciar el Teorema de descomposición fijemos algunas notaciones relativas a categorías derivadas. Dada  $\mathcal{A}$  una categoría abeliana denotaremos por  $\mathbf{C}(\mathcal{A})$  la categoría de complejos de  $\mathcal{A}$ . La categoría homotópica de  $\mathcal{A}$ ,  $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ , es la categoría cuyos objetos son los de  $\mathbf{C}(\mathcal{A})$  y cuyos morfismos son las clases de homotopía de los morfismos de  $\mathbf{C}(\mathcal{A})$ . La categoría derivada de  $\mathcal{A}$ ,  $\mathbf{D}(\mathcal{A})$ , es la localización de  $\mathbf{K}(\mathcal{A})$  respecto a la clase de los cuasi-isomorfismos, es decir, los morfismos en  $\mathbf{C}(\mathcal{A})$  que inducen un isomorfismo en homología. Se denota por  $\mathbf{D}^b(\mathcal{A})$  a la subcategoría plena de  $\mathbf{D}(\mathcal{A})$  cuyos objetos son los complejos  $\mathcal{F} \in \mathbf{D}(\mathcal{A})$  con cohomología acotada, es decir, tal que  $H^m(\mathcal{F}) = 0$ , para todo  $m \ll 0$  y  $m \gg 0$ . En particular, dado  $\mathfrak{X}$  un esquema formal designaremos por  $\mathcal{A}(\mathfrak{X})$  a la categoría de  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -Módulos y  $\mathbf{D}(\mathfrak{X})$  y  $\mathbf{D}^b(\mathfrak{X})$  a las categorías derivadas correspondientes.

5.3.1.1. Si  $\mathcal{E} \in \mathbf{C}(\mathcal{A})$  dado  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\tau^{<n} \mathcal{E}$  es el subcomplejo de  $\mathcal{E}$  tal que

$$\tau^{<n} \mathcal{E} = \begin{cases} \mathcal{E}^i, & \text{si } i < n - 1 \\ \mathcal{Z}^{n-1} \mathcal{E} & \text{si } i = n - 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

La inclusión  $\tau^{<n} \mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{E}$  induce la identidad  $\mathcal{H}^i(\tau^{<n} \mathcal{E}) = \mathcal{H}^i(\mathcal{E})$ , para todo  $i < n$ .

5.3.1.2. Si  $\mathcal{M} \in \mathcal{A}$ ,  $\mathcal{M}[-i] \in \mathbf{C}(\mathcal{A})$  denota el complejo concentrado en grado  $i$  con componente  $i$ -ésima  $\mathcal{M}$ .

5.3.1.3. Un complejo  $\mathcal{E} \in \mathbf{D}(\mathcal{A})$  se dice que es *descomponible* si es isomorfo a un complejo en  $\mathbf{D}(\mathcal{A})$  con diferencial nula. Observemos que si  $\mathcal{E}$  es descomponible entonces

$$\mathcal{E} \cong \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathcal{H}^i \mathcal{E}[-i] \text{ en } \mathbf{D}(\mathcal{A}) \quad (5.3.1.7)$$

Dado  $\mathcal{E} \in \mathbf{D}(\mathcal{A})$  descomponible, una *descomposición* de  $\mathcal{E}$  es un isomorfismo como el anterior que induce la identidad entre las homologías.

5.3.1.4. Denotaremos por  $\mathbf{D}(\mathfrak{X}) \times \mathbf{D}(\mathfrak{X}) \xrightarrow{\mathbb{L}\otimes} \mathbf{D}(\mathfrak{X})$  el funtor derivado del producto tensor. Dado  $\mathcal{F} \in \mathbf{D}^b(\mathfrak{X})$  y  $\mathcal{G} \in \mathbf{D}(\mathfrak{X})$ , entonces  $\mathcal{F} \otimes^{\mathbb{L}} \mathcal{G} = \mathcal{F}' \otimes \mathcal{G}$  donde  $\mathcal{F}' \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}$  es una resolución  $K$ -plana de  $\mathcal{F}$  (véase [Sp]).

5.3.1.5. [Go, §5] Sea  $\mathcal{X}$  un espacio topológico,  $\mathcal{U}$  un recubrimiento abierto de  $\mathcal{X}$  y  $\mathcal{F}^\bullet$  un complejo acotado de haces de grupos abelianos sobre  $\mathcal{X}$ . Denotemos por  $\check{\mathcal{C}}(\mathcal{U}, \mathcal{F}^\bullet)$  el complejo simple asociado al bicomplejo de Čech de  $\mathcal{U}$  con valores en  $\mathcal{F}^\bullet$  y que está dado por:

$$\check{\mathcal{C}}(\mathcal{U}, \mathcal{F}^\bullet)^n = \bigoplus_{r+s=n} \check{\mathcal{C}}^r(\mathcal{U}, \mathcal{F}^s)$$

con diferencial  $\partial^n$  en la componente  $(r, s)$  igual a:

$$\check{\mathcal{C}}^r(\mathcal{U}, \mathcal{F}^s) \xrightarrow{(-1)^s \delta^r + d^s} \check{\mathcal{C}}^{r+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}^s) \oplus \check{\mathcal{C}}^r(\mathcal{U}, \mathcal{F}^{s+1})$$

donde  $\delta^\bullet$  es la diferencial del complejo de Čech  $\check{\mathcal{C}}(\mathcal{U}, \mathcal{F}^s)$  y  $d^\bullet$  es la diferencial inducida por la diferencial del complejo  $\mathcal{F}^\bullet$ .

Para todo  $s$ , por [H1, Lemma 4.2] se tiene que  $\mathcal{F}^s \rightarrow \check{\mathcal{C}}^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}^s)$  es un cuasi-isomorfismo y, entonces es un cálculo fácil comprobar que el morfismo

$$\mathcal{F}^\bullet \xrightarrow{\epsilon} \check{\mathcal{C}}(\mathcal{U}, \mathcal{F}^\bullet)$$

es un cuasi-isomorfismo de complejos de grupos abelianos.

5.3.2. Sea  $\mathfrak{Y}_0$  un esquema formal en Sfn de característica  $p$ . Se dice que un esquema formal  $\mathfrak{Y}$  (o que un morfismo  $\mathfrak{Y}_0 \hookrightarrow \mathfrak{Y}$ ) es un *levantamiento plano de  $\mathfrak{Y}_0$  sobre  $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$*  si existe un morfismo plano  $\mathfrak{Y} \xrightarrow{\text{Spec}} (\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})$  de modo que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{Y} & \longrightarrow & \text{Spec}(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathfrak{Y}_0 & \longrightarrow & \text{Spec}(\mathbb{F}_p) \end{array}$$

es cartesiano.

TEOREMA 5.3.3 (Teorema de descomposición). *Sea  $\mathfrak{Y}_0$  un esquema formal en Sfn de característica  $p$  e  $\mathfrak{Y}$  un levantamiento plano de  $\mathfrak{Y}_0$  sobre  $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ . Dado  $\mathfrak{X}_0 \xrightarrow{f_0} \mathfrak{Y}_0$  un morfismo liso en Sfn y  $\mathfrak{X}_0 \xrightarrow{F_0} \mathfrak{X}'_0$  el morfismo de Frobenius relativo de  $\mathfrak{X}_0$  sobre  $\mathfrak{Y}_0$ , si existe  $\mathfrak{X}'$  un levantamiento liso de  $\mathfrak{X}'_0$  sobre  $\mathfrak{Y}$  (cf. 4.2.1) entonces el complejo de  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'_0}$ -Módulos  $\tau^{<p}(F_{0*}\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}_0/\mathfrak{Y}_0}^\bullet)$  es descomponible en  $\mathbf{D}(\mathfrak{X}'_0)$ .*

En particular, si  $X_0 \xrightarrow{f_0} Y_0$  está en Sch, el Teorema 5.3.3 coincide con el Teorema de descomposición análogo para esquemas (véase [DI, Théorème 2.1]).

5.3.4. Sea  $k$  un cuerpo perfecto de característica  $p$  y sea  $Y_0 = \text{Spec}(k)$ . Entonces existe un levantamiento plano de  $Y_0$  sobre  $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$  dado (salvo isomorfismos) por  $Y = \text{Spec}(W_2(k))$  donde  $W_2(k)$  es el anillo de vectores de Witt<sup>3</sup> de longitud 2 sobre  $k$ . Por otro lado, se verifica que el endomorfismo absoluto de Frobenius  $Y_0 \xrightarrow{F_{Y_0}} Y_0$  es un automorfismo. Con lo cual, dado  $\mathfrak{X}_0 \xrightarrow{f_0} Y_0$  un morfismo liso en Sfn del diagrama (5.2.6.1) correspondiente se deduce que  $\mathfrak{X}'_0 \xrightarrow{(F_{Y_0})'} \mathfrak{X}_0$  es un isomorfismo. Entonces  $\mathfrak{X}'_0$  admite un levantamiento liso sobre  $Y$  si, y sólo si, lo admite  $\mathfrak{X}_0$ .

Con estas notaciones las primeras consecuencias del Teorema 5.3.3 son:

COROLARIO 5.3.5. *Dado  $k$  un cuerpo perfecto de característica  $p$ , sea  $\mathfrak{X}_0 \xrightarrow{f_0} Y_0 = \text{Spec}(k)$  un morfismo liso en Sfn. Si existe un levantamiento liso de  $\mathfrak{X}_0$  sobre  $Y = \text{Spec}(W_2(k))$ , entonces  $\tau^{<p}(F_{0*}\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}_0/Y_0}^\bullet)$  es descomponible en  $\mathbf{D}(\mathfrak{X}'_0)$ .*

COROLARIO 5.3.6. *Dado  $k$  un cuerpo perfecto de característica  $p$ , sea  $Z_0 \xrightarrow{f_0} Y_0 = \text{Spec}(k)$  un morfismo de tipo finito en Sch y supongamos que  $Z_0$  es embebible en un  $Y_0$ -esquema liso  $X_0$ . Si existe un levantamiento liso de  $\widehat{X}_0 = X_{0/Z_0}$  sobre  $Y = \text{Spec}(W_2(k))$ , entonces  $\tau^{<p}(F_{0*}\widehat{\Omega}_{\widehat{X}_0/Y_0}^\bullet)$  es descomponible en  $\mathbf{D}(\widehat{X}'_0)$ .*

En lo que queda de sección nos ocuparemos de la demostración del Teorema 5.3.3. En la exposición de la demostración seguiremos la línea argumental de la prueba del Teorema de descomposición en Sch dada en [I, §5].

---

<sup>3</sup> $W_2(k)$  es el conjunto de pares  $(a_1, a_2) \in k \times k$  con suma

$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2 + p^{-1}(a_1^p + b_1^p - (a_1 + b_1)^p))$$

y producto

$$(a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) = (a_1 \cdot b_1, b_2 \cdot a_1^p + a_2 \cdot b_1^p)$$

5.3.7. Bajo las hipótesis del Teorema 5.3.3, dar una descomposición de  $\tau^{<p}(F_{0*}\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}_0/\mathfrak{Y}_0}^\bullet)$  es equivalente a dar un morfismo en  $\mathbf{D}(\mathfrak{X}'_0)$

$$\bigoplus_{i < p} \mathcal{H}^i F_{0*}\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}_0/\mathfrak{Y}_0}^\bullet[-i] \longrightarrow F_{0*}\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}_0/\mathfrak{Y}_0}^\bullet$$

que induzca la identidad a través del funtor  $\mathcal{H}^i$  para todo  $i < p$ . Por el Teorema 5.2.18 esto es equivalente a dar un morfismo en  $\mathbf{D}(\mathfrak{X}'_0)$

$$\bigoplus_{i < p} \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}'_0/\mathfrak{Y}_0}^i[-i] \longrightarrow F_{0*}\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}_0/\mathfrak{Y}_0}^\bullet \quad (5.3.7.8)$$

que coincida en homología con el isomorfismo de Cartier.

La prueba del Teorema 5.3.3 va a consistir en asociar al levantamiento liso  $\mathfrak{X}'$  de  $\mathfrak{X}'_0$  sobre  $\mathfrak{Y}$  un morfismo como (5.3.7.8). La demostración se hará en varias etapas:

- **Paso 1:** el resultado principal es la Proposición 5.3.13, en la que se probará que si existe un  $\mathfrak{Y}$ -morfismo  $\mathfrak{X} \xrightarrow{F} \mathfrak{X}'$  que levanta a  $F_0$  (véase 5.3.9), entonces el complejo  $\tau^{<p}(F_{0*}\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}_0/\mathfrak{Y}_0}^\bullet)$  es descomponible en  $\mathbf{D}(\mathfrak{X}'_0)$ .
- **Paso 2:** en la Proposición 5.3.16 se demostrará que el complejo  $\tau^{<2}(F_{0*}\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}_0/\mathfrak{Y}_0}^\bullet)$  es descomponible en  $\mathbf{D}(\mathfrak{X}'_0)$ .
- **Paso 3:** se extiende la descomposición, dada en la Proposición 5.3.16, del complejo  $\tau^{<2}(F_{0*}\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}_0/\mathfrak{Y}_0}^\bullet)$  a una descomposición del complejo  $\tau^{<p}(F_{0*}\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}_0/\mathfrak{Y}_0}^\bullet)$ .

A partir de ahora y, en el resto del capítulo,  $\mathfrak{Y}_0$  es un esquema formal en  $\mathbf{Sfn}$  de característica  $p$ ,  $\mathfrak{X}_0$  es un  $\mathfrak{Y}_0$ -esquema formal liso e  $\mathfrak{Y}$  es un levantamiento plano de  $\mathfrak{Y}_0$  sobre  $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})$ .

**Paso 1.** Antes de enunciar la Proposición 5.3.13 necesitamos fijar algunas notaciones y definiciones, así como exponer algunos resultados técnicos que se usarán en su demostración.

5.3.8. Sea  $\mathfrak{S}_0 \xrightarrow{i} \mathfrak{S}$  un levantamiento liso sobre  $\mathfrak{Y}$  (cf. 4.2.1).

- (1) De la sucesión exacta corta de  $(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})$ -módulos  $0 \rightarrow p \cdot \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{F}_p \rightarrow 0$  se tiene que la sucesión de  $\mathcal{O}_{\mathfrak{S}}$ -Módulos

$$0 \rightarrow p \cdot \mathcal{O}_{\mathfrak{S}} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathfrak{S}} \rightarrow i_*(\mathcal{O}_{\mathfrak{S}_0}) \rightarrow 0 \quad (5.3.8.9)$$

es exacta y que  $i$  es un encaje cerrado dado por el Ideal  $p \cdot \mathcal{O}_{\mathfrak{S}} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{S}}$ .

- (2) El isomorfismo  $\mathbb{F}_p \xrightarrow{p} p \cdot \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$  de  $(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})$ -módulos induce el isomorfismo de  $\mathcal{O}_{\mathfrak{S}}$ -Módulos

$$i_*(\mathcal{O}_{\mathfrak{S}_0}) \xrightarrow{\cong} p \cdot \mathcal{O}_{\mathfrak{S}} \quad (5.3.8.10)$$

definido localmente por  $a + p \cdot \mathcal{O}_{\mathfrak{S}} \rightsquigarrow p \cdot a$ .

Como  $\widehat{\Omega}_{\mathfrak{S}/\mathfrak{Y}}^1$  es un  $\mathcal{O}_{\mathfrak{S}}$ -Módulo localmente libre (Proposición 2.3.5) aplicando el funtor  $- \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{S}}} \widehat{\Omega}_{\mathfrak{S}/\mathfrak{Y}}^1$  a la sucesión 5.3.8.9 y al isomorfismo 5.3.8.10 se obtienen la sucesión exacta corta de  $\mathcal{O}_{\mathfrak{S}}$ -Módulos

$$0 \rightarrow p \cdot \widehat{\Omega}_{\mathfrak{S}/\mathfrak{Y}}^1 \rightarrow \widehat{\Omega}_{\mathfrak{S}/\mathfrak{Y}}^1 \rightarrow i_*(\mathcal{O}_{\mathfrak{S}_0}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{S}}} \widehat{\Omega}_{\mathfrak{S}/\mathfrak{Y}}^1 \rightarrow 0 \quad (5.3.8.11)$$

y el isomorfismo de  $\mathcal{O}_{\mathfrak{S}}$ -Módulos

$$i_*(\mathcal{O}_{\mathfrak{S}_0}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{S}}} \widehat{\Omega}_{\mathfrak{S}/\mathfrak{Y}}^1 \xrightarrow{\mathbf{p}} p \cdot \widehat{\Omega}_{\mathfrak{S}/\mathfrak{Y}}^1, \quad (5.3.8.12)$$

respectivamente<sup>4</sup>. Observemos que el isomorfismo  $\mathbf{p}$  está definido localmente por  $1 \otimes \widehat{d}(s) \rightsquigarrow p \cdot \widehat{d}(s)$ .

5.3.9. Dado  $\mathfrak{X}_0 \xrightarrow{F_0} \mathfrak{X}'_0$  el morfismo de Frobenius relativo de  $\mathfrak{X}_0$  sobre  $\mathfrak{Y}_0$  supongamos que existen  $\mathfrak{X}_0 \xrightarrow{i} \mathfrak{X}$  y  $\mathfrak{X}'_0 \xrightarrow{i'} \mathfrak{X}'$  levantamientos lisos sobre  $\mathfrak{Y}$  (cf. 4.2.1). Un  $\mathfrak{Y}$ -morfismo  $\mathfrak{X} \xrightarrow{F} \mathfrak{X}'$  que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{X} & \xrightarrow{F} & \mathfrak{X}' \\ \uparrow i & & \uparrow i' \\ \mathfrak{X}_0 & \xrightarrow{F_0} & \mathfrak{X}'_0 \end{array} \quad (5.3.9.13)$$

se dice que<sup>5</sup> levanta a  $F_0$ . Observemos que, como  $\mathfrak{X}_0 \cong \mathfrak{X} \times_{\mathfrak{Y}} \mathfrak{Y}_0$  y  $\mathfrak{X}'_0 \cong \mathfrak{X}' \times_{\mathfrak{Y}} \mathfrak{Y}_0$  se tiene que el cuadrado (5.3.9.13) es cartesiano.

Veamos cómo está definido el morfismo  $F$ . Para ello supongamos que  $\mathfrak{Y}_0 = \mathrm{Spf}(B_0) \hookrightarrow \mathfrak{Y} = \mathrm{Spf}(B)$ ,  $\mathfrak{X}_0 = \mathrm{Spf}(A_0) \xrightarrow{i} \mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$  y  $\mathfrak{X}'_0 = \mathrm{Spf}(A'_0) \xrightarrow{i'} \mathfrak{X}' = \mathrm{Spf}(A')$  están en  $\mathrm{Sfn}_{\mathrm{af}}$  con  $A_0 = A/pA$  y  $A'_0 = A'/pA'$ . Dados  $a_0 = a + p \cdot A$  con  $a \in A$ ,  $a'_0 = 1 \otimes a_0 \in A'_0$  y  $a' \in A'$  tal que  $a'_0 = a' + p \cdot A'$ , como  $F_0(a'_0) = a_0^p$  (véase 5.2.6.1) de la conmutatividad del diagrama 5.3.9.13 se deduce que

$$F(a') = a^p + p \cdot c$$

donde  $c \in A$ .

Obsérvese que el morfismo  $F$  no tiene por qué ser el morfismo de Frobenius relativo de  $\mathfrak{X}$  sobre  $\mathfrak{Y}$ .

5.3.10. Con las hipótesis y notaciones de 5.3.9 se verifica que la imagen del morfismo  $\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}'/\mathfrak{Y}}^1 \xrightarrow{\mathrm{can.}} F_* \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^1$  está contenida en  $p \cdot (F_*(\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^1))$ .

<sup>4</sup>Dado  $\mathfrak{S}_0 \xrightarrow{i} \mathfrak{S}$  un levantamiento liso sobre  $\mathfrak{Y}$ , en lo que sigue y, siempre que no exista confusión, utilizaremos  $\mathbf{p}$  para denotar indistintamente los isomorfismos (5.3.8.10) y (5.3.8.12).

<sup>5</sup>Según la terminología establecida en la Sección 4.1 lo correcto sería decir que  $F$  es un levantamiento de  $\mathfrak{X}_0 \xrightarrow{F_0} \mathfrak{X}'_0 \xrightarrow{i'} \mathfrak{X}'$  sobre  $\mathfrak{Y}$ .



En efecto, aplicando  $i'_*$  al morfismo canónico  $\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}'_0/\mathfrak{Y}_0}^1 \xrightarrow{0} F_{0*}\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}'_0/\mathfrak{Y}_0}^1$  (véase 5.2.15) se tiene que el morfismo de  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}$ -Módulos

$$i'_*(\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}'_0/\mathfrak{Y}_0}^1) \rightarrow i'_*(F_{0*}(\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}'_0/\mathfrak{Y}_0}^1)) = F_*(i_*(\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}'_0/\mathfrak{Y}_0}^1))$$

es nulo o, equivalentemente por la fórmula de proyección (*cf.* [H1, Exercise 5.1.(d), p. 124]), el morfismo

$$i'_*\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'_0} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}} \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}'/\mathfrak{Y}}^1 \rightarrow F_*(i_*\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_0} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^1)$$

es nulo. Entonces como  $i'_*\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'_0} = \mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}/p \cdot \mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}$  se deduce la afirmación.

5.3.11. Bajo las hipótesis y notaciones de 5.3.9, aplicando  $i^*$  al morfismo  $\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}'/\mathfrak{Y}}^1 \xrightarrow{\text{can.}} F_*\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^1$  se tiene que existe un único morfismo de  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'_0}$ -Módulos  $\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}'_0/\mathfrak{Y}_0}^1 \xrightarrow{\varphi_F^1} F_{0*}\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}'_0/\mathfrak{Y}_0}^1$  de modo que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} i^*(\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}'/\mathfrak{Y}}^1) & \xrightarrow{\text{can.}} & p \cdot i^*(F_*(\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^1)) \\ \uparrow \wr & & \downarrow \\ \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}'_0/\mathfrak{Y}_0}^1 & \xrightarrow{\varphi_F^1} & F_{0*}(\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}'_0/\mathfrak{Y}_0}^1) \end{array} \quad (5.3.11.14)$$

donde:

- el morfismo vertical izquierdo es el dado por cambio de base (véase 2.1.24).
- el morfismo vertical derecho se corresponde con el isomorfismo

$$p \cdot F_*(\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^1) \xrightarrow{(F_*\mathbf{p})^{-1}} F_*(i_*(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_0}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}^1) \cong (F \circ i)_*\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}_0/\mathfrak{Y}_0}^1$$

a través del par adjunto  $(i^*, i'_*)$ .

Si  $\mathfrak{Y}_0 = \text{Spf}(B_0) \hookrightarrow \mathfrak{Y} = \text{Spf}(B)$ ,  $\mathfrak{X}_0 = \text{Spf}(A_0) \hookrightarrow \mathfrak{X} = \text{Spf}(A)$  y  $\mathfrak{X}'_0 = \text{Spf}(A'_0) \hookrightarrow \mathfrak{X}' = \text{Spf}(A')$  están en  $\text{Sfn}_{\text{af}}$  con  $A_0 = A/pA$  y  $A'_0 = A'/pA'$ . Dados  $a_0 = a + p \cdot A$  con  $a \in A$  y  $a' \in A'$  tal que  $1 \otimes a_0 = a' + p \cdot A'$ , como  $F_0(1 \otimes a_0) = a_0^p$  (véase 5.2.6.1) de la definición de  $F$  (véase 5.3.9) se deduce que el morfismo  $\varphi_F^1$  está dado localmente por

$$1 \otimes \widehat{d}(a_0) \rightsquigarrow a_0^{p-1} \widehat{d}(a_0) + \widehat{d}(c_0)$$

donde  $c_0 = c + p \cdot A$ , para algún  $c \in A$ .

LEMA 5.3.12. *Con las notaciones e hipótesis anteriores, el morfismo  $\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}'_0/\mathfrak{Y}_0}^1 \xrightarrow{\varphi_F^1} F_{0*}\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}'_0/\mathfrak{Y}_0}^1$  induce en homología el isomorfismo de Cartier en grado 1.*

DEMOSTRACIÓN. De la definición de  $\varphi_F^1$  (véase 5.3.11) se deduce que  $\text{Im}(\varphi_F^1) \subset \mathcal{Z}^1 F_{0*}\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}'_0/\mathfrak{Y}_0}^\bullet$  y que la composición de los morfismos

$$\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}'_0/\mathfrak{Y}_0}^1 \xrightarrow{\varphi_F^1} \mathcal{Z}^1 F_{0*}\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}'_0/\mathfrak{Y}_0}^\bullet \longrightarrow \mathcal{H}^1 F_{0*}\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}'_0/\mathfrak{Y}_0}^\bullet$$

es  $\gamma^1$ , el isomorfismo de Cartier (5.2.18.4) en grado 1 (recordemos que el isomorfismo de Cartier esta definido localmente por  $1 \otimes \widehat{d}(a_0) \rightsquigarrow [a_0^{p-1} \widehat{d}(a_0)]$ ).  $\square$

**PROPOSICIÓN 5.3.13.** *En las hipótesis del Teorema 5.3.3 supongamos que existe un  $\mathfrak{Y}$ -morfismo  $F$  que levanta a  $F_0$  (en el sentido de 5.3.9). Entonces existe un morfismo en  $\mathcal{A}(\mathfrak{X}'_0)$ ,*

$$\bigoplus_{i < p} \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}'_0/\mathfrak{Y}_0}^i[-i] \xrightarrow{\varphi_F^\bullet} F_{0*} \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}_0/\mathfrak{Y}_0}^\bullet$$

que induce el isomorfismo de Cartier (5.2.18.4) en  $\mathcal{H}^i$ , para todo  $i < p$  de modo que:

si  $i = 0$  es el morfismo canónico  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'_0} \rightarrow F_{0*} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}_0}$ ;

si  $i = 1$  es el morfismo  $\varphi_F^1$  definido en 5.3.11.

**DEMOSTRACIÓN.** Por el Lema 5.3.12 y el Teorema 5.2.18, basta tomar  $\varphi_F^i$  la composición de los morfismos

$$\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}'_0/\mathfrak{Y}_0}^i = \wedge^i \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}'_0/\mathfrak{Y}_0}^1 \xrightarrow{\wedge^i \varphi_F^1} \wedge^i F_{0*} \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}_0/\mathfrak{Y}_0}^1 \xrightarrow{\text{prod.}} F_{0*} \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}_0/\mathfrak{Y}_0}^i,$$

para todo  $1 < i < p$ .  $\square$

**COROLARIO 5.3.14.** *En las hipótesis del Teorema 5.3.3 supongamos que existe un  $\mathfrak{Y}$ -morfismo  $F$  que levanta a  $F_0$  (en el sentido de 5.3.9). Entonces el complejo de  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'_0}$ -Módulos  $\tau^{<p}(F_{0*} \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}_0/\mathfrak{Y}_0}^\bullet)$  es descomponible en  $\mathbf{D}(\mathfrak{X}'_0)$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Por 5.3.7 es consecuencia inmediata de la proposición anterior.  $\square$

**Paso 2.** El resultado principal es la Proposición 5.3.16 en la que se demuestra que el complejo  $\tau^{<2}(F_{0*} \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}_0/\mathfrak{Y}_0}^\bullet)$  es descomponible en  $\mathbf{D}(\mathfrak{X}'_0)$ . La prueba consiste en construir un morfismo  $\varphi^1$  de  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'_0}$ -Módulos que induzca en la homología  $\mathcal{H}^1$  el isomorfismo de Cartier y que, por lo tanto, proporcione una descomposición de  $\tau^{<2}(F_{0*} \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}_0/\mathfrak{Y}_0}^\bullet)$ . Para ello, dado  $(\mathfrak{U}_\alpha)$  un recubrimiento abierto afín arbitrario de  $\mathfrak{X}_0$ , vamos a “pegar” en  $\mathbf{D}(\mathfrak{X}'_0)$  los morfismos  $\varphi_{F_\alpha}$  asociados a cada levantamiento  $\mathfrak{U}_\alpha \xrightarrow{F_\alpha} \mathfrak{X}'$  de  $F_0|_{\mathfrak{U}_\alpha}$  (cf. Proposición 5.3.13) y comprobaremos que no depende del recubrimiento elegido de  $\mathfrak{X}_0$ . Esta construcción no es trivial dada la naturaleza no local de la categoría derivada.

Para la demostración de la Proposición 5.3.16 necesitamos el siguiente lema en el que se comparan los morfismos  $\varphi_{F_i}$  asociados a distintos  $\mathfrak{Y}$ -morfismos  $\mathfrak{X}_i \xrightarrow{F_i} \mathfrak{X}'$  que levantan a  $F_0$  (en el sentido de 5.3.9).

**LEMA 5.3.15.** *En las hipótesis del Teorema 5.3.3 y con las notaciones establecidas en el Paso 1, para cada par de  $\mathfrak{Y}$ -morfismos  $\mathfrak{X}_1 \xrightarrow{F_1} \mathfrak{X}'$  y  $\mathfrak{X}_2 \xrightarrow{F_2}$*

$\mathfrak{X}'$  que levantan a  $F_0$  (en el sentido de 5.3.9) existe un homomorfismo de  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}$ -Módulos  $\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}'/\mathfrak{Y}_0}^1 \xrightarrow{\phi(F_1, F_2)} F_{0*}\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_0}$  tal que:

$$\varphi_{F_1}^1 - \varphi_{F_2}^1 = F_{0*}\widehat{d} \circ \phi(F_1, F_2) \quad (5.3.15.15)$$

Además dado  $\mathfrak{X}_3 \xrightarrow{F_3} \mathfrak{X}'$  otro  $\mathfrak{Y}$ -morfismo que levanta a  $F_0$  (en el sentido de 5.3.9), se verifica que

$$\phi(F_1, F_2) + \phi(F_2, F_3) = \phi(F_1, F_3) \quad (5.3.15.16)$$

DEMOSTRACIÓN.

(1) En primer lugar, vamos a definir  $\phi(F_1, F_2)$  cuando existe un  $\mathfrak{Y}$ -isomorfismo  $\mathfrak{X}_1 \xrightarrow{u} \mathfrak{X}_2$  que induce la identidad en  $\mathfrak{X}_0$  (cf. 4.2.2.3). Los morfismos  $F_1$  y  $F_2 \circ u$  son dos levantamientos de  $\mathfrak{X}_0 \xrightarrow{F_0} \mathfrak{X}'_0 \xrightarrow{i'} \mathfrak{X}'$  sobre  $\mathfrak{Y}$  y por 4.1.1.(1) existe un único homomorfismo de  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}$ -Módulos  $\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}'/\mathfrak{Y}}^1 \xrightarrow{\Psi} F_{1*}(p \cdot \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$  tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}'} & \xrightarrow{\widehat{d}'} & \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}'/\mathfrak{Y}}^1 \\ \downarrow F_1^\# - (F_2 \circ u)^\# & \searrow \Psi & \\ F_{1*}(p \cdot \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}) & & \end{array}$$

es conmutativo. Aplicando  $i^*$  al diagrama anterior se tiene que existe un homomorfismo de  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'_0}$ -Módulos  $\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}'_0/Y_0}^1 \xrightarrow{\phi(u, F_1, F_2)} F_{0*}\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_0}$  de modo que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc} i'^*\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'} & \xrightarrow{\quad} & i^*(\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}'/\mathfrak{Y}}^1) & \xrightarrow{\sim} & \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}'_0/Y_0}^1 \\ \downarrow i^*(F_1^\# - (F_2 \circ u)^\#) & \searrow i^*(\Psi) & & & \downarrow \phi(u, F_1, F_2) \\ i'^*(F_{1*}(p \cdot \mathcal{O}_{\mathfrak{X}_1})) & \xrightarrow{i'^*(F_{1*}(p^{-1}))} & i'^*(i'_*(F_{0*}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_0}))) & \xrightarrow{can.} & F_{0*}\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_0} \end{array}$$

Veamos que  $\phi(u, F_1, F_2)$  no depende de  $u$ . Así es, dado  $\mathfrak{X}_1 \xrightarrow{v} \mathfrak{X}_2$  otro  $\mathfrak{Y}$ -isomorfismo que induce la identidad en  $\mathfrak{X}_0$ , 4.1.1.(1) implica que existe un único homomorfismo de  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_2}$ -Módulos  $\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}_2/\mathfrak{Y}}^1 \xrightarrow{\psi} u_*(p \cdot \mathcal{O}_{\mathfrak{X}_1}) \cong i_{2*}\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_0}$  tal que  $v^\# - u^\# = \psi \circ \widehat{d}$  siendo  $i_2$  la inclusión  $\mathfrak{X}_0 \hookrightarrow \mathfrak{X}_2$ . Equivalentemente por adjunción y, cometiendo un abuso de notación, existe un único homomorfismo  $\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}_0/\mathfrak{Y}_0}^1 \xrightarrow{\psi} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}_0}$  de  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_0}$ -Módulos tal que  $v^\# - u^\# = \psi \circ \widehat{d}$ . Por otro lado, como  $F_2 \circ u$  y  $F_2 \circ v$  son dos levantamientos de  $i' \circ F_0$  sobre  $\mathfrak{Y}$  por 4.1.1.(1) existe un único morfismo  $F_0^*\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}'_0/\mathfrak{Y}_0}^1 \xrightarrow{\eta} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}_0}$  de  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_0}$ -Módulos tal que  $(F_2 \circ v)^\# - (F_2 \circ u)^\# = \eta \circ \widehat{d}'$ . Por la unicidad  $\eta$  se factoriza como

$$F_0^*\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}'_0/\mathfrak{Y}_0}^1 \xrightarrow{can.} \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}'_0/\mathfrak{Y}_0}^1 \xrightarrow{\psi} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}_0}$$

Ahora bien, por 5.2.15 el morfismo canónico  $F_0^*\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}'_0/\mathfrak{Y}_0}^1 \rightarrow \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}'_0/\mathfrak{Y}_0}^1$  es nulo y se concluye que  $\eta = 0$  y, por lo tanto,  $F_2 \circ u = F_2 \circ v$ .

(2) En general, dado  $(\mathfrak{U}_\alpha)$  un recubrimiento abierto afín de  $\mathfrak{X}_0$ , para cada  $\alpha$ , 4.2.2.2 implica que existe un  $\mathfrak{Y}$ -isomorfismo  $\mathfrak{X}_1|_{\mathfrak{U}_\alpha} \xrightarrow{u_\alpha} \mathfrak{X}_2|_{\mathfrak{U}_\alpha}$  que induce la identidad en  $\mathfrak{U}_\alpha$ . Entonces por (1) basta definir para cada  $\alpha$

$$\phi(F_1, F_2)|_{\mathfrak{U}_\alpha} := \phi(u_\alpha, F_1|_{\mathfrak{U}_\alpha}, F_2|_{\mathfrak{U}_\alpha})$$

Para probar las igualdades (5.3.15.15) y (5.3.15.16) podemos restringirnos al caso afín. En este caso  $\mathfrak{X}_1$  y  $\mathfrak{X}_2$  son isomorfos (véase 4.2.2.2) y para simplificar tomaremos  $\mathfrak{X} := \mathfrak{X}_1 = \mathfrak{X}_2$ . Si  $\mathfrak{Y}_0 = \mathrm{Spf}(B_0) \hookrightarrow \mathfrak{Y} = \mathrm{Spf}(B)$ ,  $\mathfrak{X}_0 = \mathrm{Spf}(A_0) \xrightarrow{i} \mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$  y  $\mathfrak{X}'_0 = \mathrm{Spf}(A'_0) \xrightarrow{i'} \mathfrak{X}' = \mathrm{Spf}(A')$  con  $A_0 = A/pA$  y  $A'_0 = A'/pA'$ , dado  $a_0 = a + p \cdot A$  con  $a \in A$ ,  $a'_0 = 1 \otimes a_0 \in A'_0$  y  $a' \in A'$  tal que  $a'_0 = a' + p \cdot A'$ , se tiene que  $F_i(a') = a^p + p \cdot c_i$  con  $c_i \in A$  para  $i = 1, 2$  (véase 5.3.9), de donde se deduce que

$$\varphi_{F_1}^1 - \varphi_{F_2}^1 = F_{0*} \widehat{d} \circ \phi(u, F_1, F_2)$$

(2) Si suponemos que existe otro  $\mathfrak{Y}$ -morfismo  $\mathfrak{X}_3 \xrightarrow{F_3} \mathfrak{X}'$  que levanta a  $F_0$  (en el sentido de 5.3.9) y que  $\mathfrak{X}_2 \xrightarrow{v} \mathfrak{X}_3$  es un  $\mathfrak{Y}$ -isomorfismo que induce la identidad en  $\mathfrak{X}_0$ , por lo probado antes se verifica la igualdad (5.3.15.16).  $\square$

PROPOSICIÓN 5.3.16. *En las hipótesis del Teorema 5.3.3, existe un morfismo en  $\mathbf{D}(\mathfrak{X}'_0)$ ,*

$$\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}'_0/\mathfrak{Y}_0}^1[-1] \xrightarrow{\varphi^1} F_{0*} \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}_0/\mathfrak{Y}_0}^\bullet$$

que induce el isomorfismo de Cartier (cf. (5.2.18.4)) en  $\mathcal{H}^1$ .

DEMOSTRACIÓN. Fijemos  $(\mathfrak{U}_\alpha)$  un recubrimiento por abiertos afines de  $\mathfrak{X}_0$ . Por el Corolario 4.2.5 para cada  $\alpha$  existe  $\mathfrak{X}_\alpha$  un levantamiento liso de  $\mathfrak{U}_\alpha$  sobre  $\mathfrak{Y}$ . Además el Corolario 4.1.3 implica que existe un levantamiento  $\mathfrak{X}_\alpha \xrightarrow{F_\alpha} \mathfrak{X}'$  de  $\mathfrak{U}_\alpha \xrightarrow{F_0|_{\mathfrak{U}_\alpha}} \mathfrak{X}'_0 \hookrightarrow \mathfrak{X}'$  sobre  $\mathfrak{Y}$ , es decir, tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{U}_\alpha & \hookrightarrow & \mathfrak{X}_\alpha \\ \downarrow F_0|_{\mathfrak{U}_\alpha} & & \downarrow \\ \mathfrak{X}'_0 & \xrightarrow{F_\alpha} & \mathfrak{X}' \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathfrak{X}' & \longrightarrow & \mathfrak{Y} \end{array}$$

Por 5.3.11 para cada  $\alpha$  existe un homomorfismo de complejos de  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'_0|_{\mathfrak{U}_\alpha}}$ -Módulos

$$\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}'_0/\mathfrak{Y}_0}^1|_{\mathfrak{U}_\alpha} \xrightarrow{\varphi_{F_\alpha}^1} F_{0*} \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}_0/\mathfrak{Y}_0}^1|_{\mathfrak{U}_\alpha}$$

que induce el isomorfismo de Cartier en  $\mathcal{H}^1$ . Además, por el Lema 5.3.15 se tiene que, para cada par de índices  $\alpha, \beta$  tal que  $\mathfrak{U}_{\alpha\beta} := \mathfrak{U}_\alpha \cap \mathfrak{U}_\beta \neq \emptyset$  existe

un homomorfismo de  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'_0|\mathfrak{U}_\alpha}$ -Módulos

$$\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}'_0/\mathfrak{Y}_0}^1|_{\mathfrak{U}_{\alpha\beta}} \xrightarrow{\phi_{\alpha\beta}} F_{0*}\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_0}|_{\mathfrak{U}_{\alpha\beta}}$$

tal que:

$$\varphi_{F_\alpha}^1|_{\mathfrak{U}_{\alpha\beta}} - \phi_{F_\beta}^1|_{\mathfrak{U}_{\alpha\beta}} = F_{0*}\widehat{d} \circ \phi_{\alpha\beta} \quad (5.3.16.17)$$

y tal que, para todo  $\alpha, \beta, \gamma$  con  $\mathfrak{U}_{\alpha\beta\gamma} := \mathfrak{U}_\alpha \cap \mathfrak{U}_\beta \cap \mathfrak{U}_\gamma \neq \emptyset$ :

$$\phi_{\alpha\beta}|_{\mathfrak{U}_{\alpha\beta\gamma}} + \phi_{\beta\gamma}|_{\mathfrak{U}_{\alpha\beta\gamma}} = \phi_{\alpha\gamma}|_{\mathfrak{U}_{\alpha\beta\gamma}} \quad (5.3.16.18)$$

Los datos (5.3.16.17) y (5.3.16.18) permiten definir un morfismo de complejos

$$\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}'_0/\mathfrak{Y}_0}^1[-1] \xrightarrow{\varphi_{(\mathfrak{U}_\alpha, F_\alpha)}} \check{\mathcal{C}}((\mathfrak{U}_\alpha), F_{0*}\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}_0/\mathfrak{Y}_0}^\bullet)$$

de  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'_0}$ -Módulos en grado 1

$$\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}'_0/\mathfrak{Y}_0}^1[-1] \xrightarrow{(\varphi_1, \varphi_2)} \check{\mathcal{C}}^1((\mathfrak{U}_\alpha), F_{0*}\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_0}) \bigoplus \check{\mathcal{C}}^0((\mathfrak{U}_\alpha), F_{0*}\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}_0/\mathfrak{Y}_0}^1)$$

que localmente viene dado por:

$$\varphi_1 w(\alpha, \beta) := \phi_{\alpha\beta}(w|_{\mathfrak{U}_{\alpha\beta}}) \quad \varphi_2 w(\alpha) := \varphi_{F_\alpha}^1(w|_{\mathfrak{U}_\alpha})$$

Definimos  $\varphi^1$  como la composición de morfismos en  $\mathbf{D}(\mathfrak{X}'_0)$

$$\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}'_0/\mathfrak{Y}_0}^1[-1] \xrightarrow{\varphi_{(\mathfrak{U}_\alpha, F_\alpha)}} \check{\mathcal{C}}((\mathfrak{U}_\alpha), F_{0*}\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}_0/\mathfrak{Y}_0}^\bullet) \xrightarrow{\epsilon^{-1}} F_{0*}\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}_0/\mathfrak{Y}_0}^\bullet$$

donde  $\epsilon$  es el isomorfismo dado en 5.3.1.5.

El morfismo  $\varphi^1$  no depende de la elección de  $(\mathfrak{U}_\alpha, F_\alpha)$ . En efecto, si  $(\mathfrak{U}'_\beta)$  es un refinamiento de  $(\mathfrak{U}_\alpha)$  se comprueba fácilmente que  $\varphi_{(\mathfrak{U}_\alpha, F_\alpha)}^1 = \varphi_{(\mathfrak{U}'_\beta, F_\alpha|_{\mathfrak{U}'_\beta})}^1$ . Entonces si  $(\mathfrak{Y}_\beta)$  es otro recubrimiento de  $\mathfrak{X}_0$  y para todo  $\beta$ ,  $G_\beta$  es un levantamiento de  $F_0|_{\mathfrak{U}_\alpha}$ , es un ejercicio sencillo ver que  $\varphi_{(\mathfrak{U}_\alpha, F_\alpha)}^1 = \varphi_{(\mathfrak{U}_\alpha, F_\alpha) \sqcup (\mathfrak{Y}_\beta, G_\beta)}^1 = \varphi_{(\mathfrak{Y}_\beta, G_\beta)}^1$ .

Por último, veamos que  $\varphi^1$  induce el isomorfismo de Cartier en  $\mathcal{H}^1$ . Como es una cuestión local, podemos suponer que existe un  $\mathfrak{Y}$ -morfismo  $\mathfrak{X} \xrightarrow{F} \mathfrak{X}'$  que levanta a  $F_0$  y, entonces  $\varphi^1$  está definido por el morfismo  $\varphi_F^1$  dado en 5.3.11 que induce en  $\mathcal{H}^1$  el isomorfismo de Cartier.  $\square$

**COROLARIO 5.3.17.** *En las hipótesis del Teorema 5.3.3, el complejo de  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'_0}$ -Módulos  $\tau^{<2}(F_{0*}\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}_0/\mathfrak{Y}_0}^\bullet)$  es descomponible en  $\mathbf{D}(\mathfrak{X}'_0)$ .*

**Paso 3.** Para todo  $1 \leq i < p$  vamos a encontrar un morfismo en  $\mathbf{D}(\mathfrak{X}'_0)$

$$\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}'_0/\mathfrak{Y}_0}^i[-i] \xrightarrow{\varphi^i} F_{0*}\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}_0/\mathfrak{Y}_0}^\bullet$$

que induzca el isomorfismo de Cartier a través del funtor  $\mathcal{H}^i$ .

Para ello, dado  $\varphi^1$  el morfismo definido en la Proposición 5.3.16, para todo  $i \geq 1$  consideramos el morfismo en  $\mathbf{D}(\mathfrak{X}'_0)$ ,

$$(\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}'_0/\mathfrak{Y}_0}^1)^{\otimes i} \xrightarrow{(\varphi^1)^{\otimes i} := \varphi^1 \otimes \dots \otimes \varphi^1} (F_{0*}\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}_0/\mathfrak{Y}_0}^1)^{\otimes i}$$

Por la Proposición 2.3.5 se tiene que  $\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}'_0/\mathfrak{Y}_0}^1$  es  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'_0}$ -Módulo localmente libre de rango finito y, por lo tanto, resulta que  $(\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}'_0/\mathfrak{Y}_0}^1[-1])^{\boxtimes i} \cong (\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}'_0/\mathfrak{Y}_0}^1)^{\otimes i}[-i]$  en  $\mathbf{D}(\mathfrak{X}'_0)$ . Por otro lado, el Corolario 5.2.13 implica que  $F_{0*}\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}'_0/\mathfrak{Y}_0}^\bullet$  es un complejo de  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'_0}$ -Módulos localmente libres de rango finito, de donde se sigue que  $(F_{0*}\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}'_0/\mathfrak{Y}_0}^\bullet)^{\boxtimes i} \cong (F_{0*}\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}'_0/\mathfrak{Y}_0}^\bullet)^{\otimes i}$  en  $\mathbf{D}(\mathfrak{X}'_0)$ .

Sea  $1 \leq i < p$ . El morfismo de antisimetrización

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}'_0/\mathfrak{Y}_0}^i[-i] & \xrightarrow{A} & (\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}'_0/\mathfrak{Y}_0}^1)^{\otimes i}[-i] \\ w_1 \wedge w_2 \wedge \cdots \wedge w_i & \rightsquigarrow & \frac{1}{i!} \sum_{\sigma \in S_i} \text{sg}(\sigma) w_{\sigma(1)} \otimes w_{\sigma(2)} \otimes \cdots \otimes w_{\sigma(i)} \end{array}$$

es una sección de la aplicación producto

$$\begin{array}{ccc} (\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}'_0/\mathfrak{Y}_0}^1)^{\otimes i}[-i] & \xrightarrow{\text{prod.}} & \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}'_0/\mathfrak{Y}_0}^i[-i] \\ w_1 \otimes w_2 \otimes \cdots \otimes w_i & \rightsquigarrow & w_1 \wedge w_2 \wedge \cdots \wedge w_i \end{array}$$

y, entonces definimos  $\varphi^i$  como la composición de morfismos en  $\mathbf{D}(\mathfrak{X}'_0)$ :

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}'_0/\mathfrak{Y}_0}^i[-i] & \xrightarrow{\varphi^i} & F_{0*}\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}'_0/\mathfrak{Y}_0}^\bullet \\ \downarrow A & & \uparrow \text{prod.} \\ (\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}'_0/\mathfrak{Y}_0}^1)^{\otimes i}[-i] & & (F_{0*}\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}'_0/\mathfrak{Y}_0}^\bullet)^{\otimes i} \\ \downarrow \wr & & \uparrow \wr \\ (\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}'_0/\mathfrak{Y}_0}^1)^{\boxtimes i}[-i] & \xrightarrow{(\varphi^1)^{\boxtimes i}} & (F_{0*}\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}'_0/\mathfrak{Y}_0}^\bullet)^{\boxtimes i} \end{array}$$

De la Proposición 5.3.16 y del Teorema 5.2.18 se concluye que  $\mathcal{H}^i \varphi^i = \gamma^i$ , donde  $\gamma^i$  es el isomorfismo de Cartier en grado  $i$ , para todo  $0 \leq i < p$  y con esto se termina la prueba del Teorema 5.3.3.

## Bibliografía

- [AJL1] Alonso Tarrío, L.; Jeremías López, A.; Lipman, J.: Duality and flat base change on formal schemes, in *Studies in duality on noetherian formal schemes and non-noetherian ordinary schemes*. Providence, RI: American Mathematical Society. Contemp. Math. **244**, 3–90, 1999.
- [AJL2] Alonso Tarrío, L.; Jeremías López, A.; Lipman, J.: Correction to the paper “Duality and flat base change on formal schemes”. Proceedings of the American Mathematical Society. **131**, 351–357, 2002.
- [AK] Altman, A. B. ; Kleiman, S.: *Introduction to Grothendieck Duality Theory*, Springer-Verlag, Heidelberg-Berlin-New York , 1970.
- [B1] Bourbaki, N.: *Commutative algebra, Chapters 1–7*. Elements of Mathematics. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1989.
- [B2] Bourbaki, N.: *Algebra I, Chapters 1–3*. Elements of Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1998.
- [C] Cartier, P.: Une nouvelle opération sur les formes différentielles, *C. R. Ac. Sc. Paris* **244**, 426–428, 1957.
- [DI] Deligne, P.; Illusie, L.: Relèvements modulo  $p^2$  et décomposition du complexe de de Rham, *Invent. math* **89**, 247–270, 1987.
- [E] Eisenbud, D.: *Commutative Algebra with a view toward Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Math. **150**, Springer-Verlag, Heidelberg, 1995.
- [Go] Godement, R.: *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*, Publications de l’Institut de Mathématique de l’Université de Strasbourg, XIII. Actualités Scientifiques et Industrielles. **1252**, Hermann, Paris, 1973.
- [EGA I] Grothendieck, A.; Dieudonné, J. A.: *Eléments de Géométrie Algébrique I*, Grundlehren der math. Wissenschaften **166**, Springer-Verlag, Heidelberg, 1971.
- [EGA III<sub>1</sub>] Grothendieck, A.; Dieudonné, J. A.: *Eléments de Géométrie Algébrique III, Étude cohomologique des faisceaux cohérents*, Publications Mathématiques, **8**, Institut des Hautes Études Scientifiques, Paris, 1961.
- [EGA IV<sub>1</sub>] Grothendieck, A.; Dieudonné, J. A.: *Eléments de Géométrie Algébrique IV, Étude locale des schémas et des morphismes de schémas (première partie)*, Publications Mathématiques, **20**, Institut des Hautes Études Scientifiques, Paris, 1964.
- [EGA IV<sub>4</sub>] Grothendieck, A.; Dieudonné, J. A.: *Eléments de Géométrie Algébrique IV, Étude locale des schémas et des morphismes de schémas (quatrième partie)*, Publications Mathématiques, **32**, Institut des Hautes Études Scientifiques, Paris, 1967.
- [G] Grothendieck, A.: *Géométrie formelle et géométrie algébrique*. Séminaire Bourbaki, **5**, Exp. No. 182, 193–220, errata p. 390, Soc. Math. France, Paris, 1995.
- [GD] Grothendieck, A.; Dieudonné, J. A.: *Eléments de Géométrie Algébrique I, Le Langage des schémas*, Publications Mathématiques, **8**, Institut des Hautes Études Scientifiques, Paris, 1961.

- [SGA 2] Grothendieck, A.: *Cohomologie locale des faisceaux cohérents et théorèmes de Lefschetz locaux et globaux*, North Holland Pub. Co., 1968.
- [SGA 5] Grothendieck, A.: *Cohomologie l-ádique et fonctions L*, Springer Lecture Notes In Math, **589**, Springer-Verlag, 1977.
- [H1] Hartshorne, R.: *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics, No. **52**. Springer-Verlag, New York, 1977.
- [H2] Hartshorne, R.: *On the De Rham cohomology of algebraic varieties*. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math, **45**, 5–99, 1975.
- [HM] Hironaka, H.; Matsumura, H.: Formal functions and formal embeddings, *J. of Math. Soc. of Japan* **20**, 52–82, 1968.
- [I] Illusie, L.: Frobenius and Hodge Degeneration in *Introduction à la théorie de Hodge*. Panoramas et Synthèses, Société Mathématique de France, Paris, **3** 99–149, 1996.
- [K] Katz, N.: Nilpotent Connections and the Monodromy Theorem, *Pub. Math. IHES* **39**, 175–232, 1970.
- [L] Lipman, J.: *Notes on derived categories and derived functors*, preprint.
- [LNS] Lipman, J.; Nayak, S.; Sastry, P. : *Pseudofunctorial behavior of Cousin complexes on formal schemes*, preprint.
- [Ma] Matsumura, H.: *Commutative ring theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1986.
- [McL] MacLane, S.: *Categories for the Working Mathematician*, Springer-Verlag, New York Heidelberg Berlin, 1971.
- [Sp] Spaltenstein, N. Resolutions of unbounded complexes. *Compositio Math.* **65**, 121–154, 1988.
- [T] Tennison, B. R.: *Sheaf Theory*, London Mathematical Society Lecture Note Series, **20**, Cambridge University Press, Cambridge, 1975.
- [Y] Yekutieli, A.: Smooth formal embeddings and the residue complex. *Canad. J. Math.* **50**, 863–896, 1998.
- [Z] Zariski, O.: *Theory and applications of holomorphic functions on algebraic varieties over arbitrary ground fields*. Mem. Amer. Math. Soc., **50**, 1951.