# Divisores y haces inversibles en esquemas noetherianos

Marta Pérez Rodríguez

Trabajo realizado dentro del proyecto ("Cohomología de esquemas y categorías derivadas") DGESIC PB97-0530.

# Índice

# Introducción

En el estudio global de las variedades algebraicas, la introducción de invariantes algebraicos que reflejen la estructura de la variedad ha sido un método que se ha revelado especialmente útil. Las raíces de la noción de divisor son clásicas: surge en la teoría de curvas algebraicas como una expresión que prescribe los ceros y los polos de una función racional en el contexto del problema de Riemann-Roch. La utilización de este tipo de ideas en variedades de dimensión superior comienza modernamente con Weil que desarrolla el estudio de los ciclos de codimensión uno e incluso establece una conexión entre este concepto y los fibrados vectoriales de rango uno presintiendo la teoría de las clases de Chern. Con todo, pese a lo geométricamente intuitiva que resulta esta noción, no se comporta adecuadamente en presencia de singularidades, específicamente si los anillos locales de gérmenes de funciones regulares de la variedad no son factoriales.

Posteriormente, Cartier define en su tesis una noción diferente de divisor cuya significación geométrica es menos patente que la de Weil, pero, por contra, está definida para cualquier variedad o conjunto algebraico independientemente de sus singularidades. Es claro, sin embargo, cómo asociar a un divisor de Cartier un haz inversible (concepto equivalente al de fibrado vectorial de rango uno).

Un elemento esencial en ambas teorías es el empleo del anillo de funciones racionales. En el caso de una variedad (palabra que, a lo largo de este trabajo, implicará siempre irreducible) es simplemente el cuerpo de fracciones de cualquier anillo de coordenadas de un abierto afín. Para un conjunto algebraico general, es el producto directo de los cuerpos de funciones racionales de sus componentes irreducibles.

Cuando Grothendieck generaliza ambas teorías al contexto de esquemas surge la dificultad de emplear un “anillo de funciones racionales” apropiado al caso no reducido, es decir, cuando existen nilpotencias en los haces estructurales. El haz total de fracciones resulta ser la noción apropiada. Hay que observar que algunas exposiciones de este concepto tienen errores como se ha señalado en [**K1**], trabajo que hemos tenido muy en cuenta en la elaboración de esta memoria. En este nuevo contexto, los divisores de Cartier se identifican con aquellos haces inversibles que son isomorfos a un subhaz del haz total de fracciones.

Una primera aportación de este trabajo es exponer una demostración de que en un esquema proyectivo sobre un anillo noetheriano, el grupo de clases de divisores de Cartier coincide con el grupo de Picard. El resultado que obtenemos es, de hecho, consecuencia de resultados generales de Grothendieck, pero nuestro enfoque es más explícito ya que emplea el anillo de coordenadas homogéneas del esquema proyectivo.

Seguimos el punto de vista desarrollado por Nakai en [**N**]. En este artículo, Nakai considera el caso de un esquema proyectivo sobre un cuerpo. Si bien sus conclusiones son ciertas, alguno de sus argumentos no son completamente correctos: utiliza que la localización de un anillo en los no divisores de cero conmuta con la localización en un elemento, así como la cuasicoherencia del haz total de fracciones, hechos que no se tienen en general. En este trabajo se subsanan estos problemas, obteniéndose una generalización del resultado enunciado por Nakai. El elemento clave en los argumentos de Nakai es la elección de un anillo de coordenadas homogéneas con todos sus generadores no divisores de cero. Sin embargo, en este trabajo se demuestra que basta con encontrar un anillo de coordenadas “no irrelevante” con un no divisor de cero homogéneo de grado uno. Dicho anillo se encuentra empleando una idea de Hübl y Kunz [**HK**].

Se plantea ahora la cuestión de si la coincidencia del grupo de clases de divisores de Cartier con el grupo de Picard se mantendrá en el caso de un esquema completo no proyectivo. Exponemos aquí el contraejemplo debido a Kleiman expuesto en su tesis y no publicado. Agradecemos la amabilidad del profesor Kleiman proporcionándonos indicaciones útiles para construir el contraejemplo. En concreto, se construye un esquema de dimensión 3 con dos puntos cerrados embebidos, cuyo subesquema reducido máximo es una variedad no singular, donde existe un haz inversible que no corresponde a ningún divisor de Cartier. Debemos observar que el contraejemplo propuesto por Hartshorne en [**Ha2**, p. 9] es incorrecto, puesto que considera un único punto cerrado embebido, y en este caso, los grupos de Picard y de clases de divisores son isomorfos.

* * *

Procedemos brevemente a la descripción de los contenidos. En la primera parte de este trabajo, hacemos un estudio detallado del haz total de fracciones, de gran utilidad en esta memoria, debido a la gran cantidad de malentendidos que han plagado las exposiciones de sus propiedades en las referencias usuales. Así, se estudian sus propiedades en el caso noetheriano y se exponen contraejemplos que ilustren las confusiones que aparecen en la bibliografía. Además se compara con el haz de funciones racionales que sólo depende del esquema reducido subyacente. Con esta herramienta describimos los divisores de Weil y los divisores de Cartier. Se ha optado por la descripción de ambos tipos de divisores porque los primeros ofrecen la visión geométrica intuitiva que se pierde en los divisores de Cartier. Sin embargo, los divisores de Cartier están definidos con mayor generalidad y son una importante herramienta de cálculo. La primera parte se concluye con una exposición de las propiedades básicas del grupo de Picard de un espacio anillado.

La segunda parte comienza con el desarrollo de los resultados generales acerca de la relación entre el grupo de Picard y el grupo de clases de divisores, probando su coincidencia en el caso íntegro. A continuación se realiza el análisis de la existencia de no divisores de cero en el anillo de coordenadas homogéneas de un esquema proyectivo sobre un anillo noetheriano. Se prueba que, sin cambiar de esquema, es posible encontrar un anillo de coordenadas homogéneas “no irrelevante”, es decir, que su ideal irrelevante contiene al menos un no divisor de cero. Además, refinando los argumentos se encuentra un no divisor de cero de grado uno, hecho clave para la demostración del resultado buscado. Finalmente, abordamos la prueba del teorema principal de este trabajo: En un esquema proyectivo sobre un anillo noetheriano, todo haz inversible está asociado a un divisor de Cartier.

La tercera parte del trabajo comienza con una breve descripción de los conceptos y resultados referentes al número de intersección. Éstos son necesarios para la exposición de un ejemplo de una variedad completa no proyectiva debido a Nagata ([**S**, p. 75]). Dicha variedad se obtiene pegando dos variedades construidas por explosión a partir de otras variedades. La no proyectividad de tal variedad se comprueba utilizando el criterio de Nakai que caracteriza los haces amplios como aquellos que son numéricamente positivos. Una variedad completa es proyectiva cuando posee un haz amplio, esto proporcionará una contradicción en nuestro caso. Finalmente, y a partir de esta variedad completa no proyectiva, se construye el ejemplo de un esquema completo no proyectivo sobre un cuerpo en el que existe un haz inversible que no está asociado a ningún divisor de Cartier. Esto se consigue mediante la adición apropiada de puntos embebidos, de modo que la presencia de nilpotencias en el haz estructural provocará la existencia de tal haz inversible.

Este trabajo ha sido dirigido por los profesores Leovigildo Alonso Tarrío y Ana Jeremías López, a los cuales agradezco la ayuda prestada.

## Convenciones

Todos los anillos considerados serán conmutativos y unitarios.

Por un esquema algebraico se entiende un esquema de tipo finito sobre un cuerpo y por una variedad, un esquema separado algebraico íntegro sobre un cuerpo algebraicamente cerrado.

CAPÍTULO 1

# Divisores y haz total de fracciones

## 1.1. Funciones regulares y funciones racionales

Sea $R$ un anillo y $X$ un $R$-esquema.

DEFINICIÓN. Un $R$-morfismo $X \xrightarrow{f} \mathbb{A}^1_R$ donde $\mathbb{A}^1_R = \operatorname{Spec}(R[T])$, se dice que es una *$R$-función regular*. Si $R = \mathbb{Z}$ se dirá simplemente que $f$ es una *función regular*.

OBSERVACIÓN. Los isomorfismos naturales [**EGA I**, (1.6.3)]

$$\operatorname{Hom}_R(X, \mathbb{A}^1_R) \;\approxeq\; \operatorname{Hom}_{R-alg}(R[T], \Gamma(X, \mathcal{O}_X)) \;\approxeq\; \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$$

permiten identificar una $R$-función regular $f$ en $X$ con una sección global del haz estructural $\mathcal{O}_X$ que en adelante seguiremos denotando por $f$.

PROPOSICIÓN 1.1.1. *Sea $f$ una función regular en $X$. Si $X$ es reducido, $U$ es un conjunto abierto denso de $X$ y $f|_U = 0$, necesariamente $f = 0$.*

DEMOSTRACIÓN. La cuestión es local por tanto podemos suponer que $X = \operatorname{Spec}(A)$ es un esquema afín. Dado $f \in A$, si $f|_U = 0$ entonces $U \subseteq v(f)$ y como $U$ es denso en $X$ resulta que $v(f) = X$, es decir, $f \in \mathfrak{p}$, $\forall \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$. Entonces $f$ es nilpotente y por ser $X$ reducido se tiene que $f = 0$. □

Sea $\mathbb{E} = \{(U, \phi) \,/\, U$ es un abierto denso de $X, \phi \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)\}$. En $\mathbb{E}$ se define la siguiente relación de equivalencia : $(U, \phi) \sim (V, \psi)$ si $\phi$ y $\psi$ coinciden en algún subconjunto abierto denso de $U \cap V$. Se comprueba fácilmente que es una relación de equivalencia. En el caso de que $X$ sea un esquema irreducible, como todos los abiertos no vacíos son densos, entonces $(U, \phi) \sim (V, \psi)$ si $\phi$ y $\psi$ coinciden en algún subconjunto abierto no vacío de $U \cap V$. Si $X$ es un esquema reducido, por la Proposición 1.1.1, $(U, \phi) \sim (V, \psi)$ si $\phi$ y $\psi$ coinciden en $U \cap V$.

DEFINICIÓN. Una *función racional* en $X$ es un elemento de $\mathbb{E}/\sim$. El conjunto de todas las funciones racionales se denota por $\mathrm{Rat}(X)$.

El *dominio de una función racional* $f \in \mathbb{E}/\sim$ viene definido por

$$\mathrm{dom}(f) = \{x \in X \,/\, x \in U \text{ para algún } (U, \phi) \in \mathbb{E} \text{ tal que } f = [(U, \phi)]\}.$$

Si $[(U, \phi)] = f$ se dice que $f$ es una *función racional definida por* $\phi$ ó que $\phi$ es un *nombre para* $f$.

Dadas $f, g \in \mathrm{Rat}(X)$ tomemos $[(U, \phi)] = f$ y $[(V, \psi)] = g$. La función racional definida por $\alpha \cdot \phi|_{U\cap V} + \beta \cdot \psi|_{U\cap V}$ donde $\alpha, \beta \in R$ se comprueba fácilmente que sólo depende de $\alpha, \beta, f, g$. Se denota $\alpha f + \beta g$. Además también se comprueba que $f \cdot g = \phi|_{U\cap V} \cdot \psi|_{U\cap V}$ está bien definida. Con estas operaciones $\mathrm{Rat}(X)$ es una $R$-álgebra y se denomina el *anillo de las funciones racionales* de $X$.

LEMA 1.1.2. *Para todo esquema* $X$

$$\mathrm{Rat}(X) = \varinjlim_{U} \Gamma(U, \mathcal{O}_X),$$

*donde* $U$ *recorre los subconjuntos abiertos densos de* $X$.

LEMA 1.1.3. *Sea* $X$ *un esquema y* $U$ *un abierto denso de* $X$. *Entonces* $\mathrm{Rat}(U)$ *es naturalmente isomorfo a* $\mathrm{Rat}(X)$.

DEMOSTRACIÓN. Todo subconjunto denso en $U$ es denso en $X$ por tanto la aplicación

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Rat}(U) & \longrightarrow & \mathrm{Rat}(X) \\ (V, \psi) & \rightsquigarrow & (V, \psi) \end{array}$$

es la inversa del homomorfismo canónico de anillos inducido por la inclusión $U \hookrightarrow X$

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Rat}(X) & \longrightarrow & \mathrm{Rat}(U) \\ (W, \phi) & \rightsquigarrow & (W \cap U, \phi|_{W\cap U}). \end{array}$$

$\square$

COROLARIO 1.1.4. *Si $X$ es un esquema irreducible y $U$ es un abierto no vacío de $X$ entonces*

$$\mathrm{Rat}(X) \approxeq \mathrm{Rat}(U).$$

PROPOSICIÓN 1.1.5. [**EGA I**, Proposition (8.1.5)] *Sea $X$ un esquema irreducible. Entonces:*

(1) *El anillo* $\mathrm{Rat}(X)$ *de las funciones racionales se identifica de modo canónico con el anillo local $\mathcal{O}_{X,\eta}$ del punto genérico $\eta$ de $X$.*
(2) $\mathrm{Rat}(X)$ *es un anillo local de dimensión cero. Además si $X$ es localmente noetheriano, es un anillo local artiniano.*
(3) *Si además $X$ es reducido, es decir, si $X$ es un esquema íntegro,* $\mathrm{Rat}(X)$ *es un cuerpo. Cuando $X = \mathrm{Spec}(A)$, se tiene* $\mathrm{Rat}(X) \approxeq \mathrm{QTot}(A)$*, el cuerpo de fracciones del dominio $A$.*

DEMOSTRACIÓN.

1. Por ser $X$ irreducible todos los abiertos no vacíos son densos en $X$ y por tanto son entornos del punto genérico $\eta$. Así $(U, \phi) \sim (V, \psi)$ si, y sólo si, $\phi_\eta = \psi_\eta$. Por el Lema 1.1.2 $\mathrm{Rat}(X)$ coincide con $\mathcal{O}_{X,\eta}$.

2. Por ser $\eta$ el punto genérico de $X$ el anillo local $\mathcal{O}_{X,\eta}$ tiene dimensión cero. En el caso de que $X$ sea localmente noetheriano se tiene que $\mathcal{O}_{X,\eta}$ es un anillo local noetheriano de dimensión cero, es decir, $\mathrm{Rat}(X)$ es un anillo local artiniano ([**A**, Teorema 8.5]).

3. Sea $X = \mathrm{Spec}(A)$ un esquema afín con $A$ un dominio. Entonces el nilradical de $A$ es nulo y por tanto si $\eta$ es el punto genérico de $A$, $\mathrm{Rat}(X) = \mathcal{O}_{X,\eta} = \mathrm{QTot}(A)$ el cuerpo de fracciones de $A$. □

LEMA 1.1.6. *Sea $X$ un esquema localmente noetheriano. Un abierto $U$ es denso en $X$ si, y sólo si, $U$ contiene a todos los puntos genéricos de las componentes irreducibles de $X$.*

*En particular, si $X = \mathrm{Spec}(A)$ es un esquema afín noetheriano, un abierto $U$ es denso en $X$ si contiene a todos los primos minimales de $A$.*

Proposición 1.1.7. *Sea* $X = \operatorname{Spec}(A)$ *un esquema afín noetheriano y sean* $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \dots, \mathfrak{p}_n$ *los primos minimales de* $A$*. Entonces,*

$$\operatorname{Rat}(X) \approxeq T^{-1}A$$

*donde* $T = A - \{\mathfrak{p}_1 \cup \mathfrak{p}_2 \cup \ldots \cup \mathfrak{p}_n\}$*.*

Demostración. [**EGA I**, Corollaire (8.1.9)] Dado $f \in T$ se tiene que $\mathfrak{p}_i \in D(f)$ para todo $i$, y por tanto $D(f)$ es denso en $X$. Por otro lado si $\mathfrak{a} \subset A$ es un ideal tal que $U = X - v(\mathfrak{a})$ es un abierto denso de $X$ entonces $\mathfrak{a} \subsetneqq \mathfrak{p}_i$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, y necesariamente $\mathfrak{a} \subsetneqq \mathfrak{p}_1 \cup \ldots \mathfrak{p}_n$. De modo que existe $f \in T$ tal que $f \in \mathfrak{a}$, es decir, tal que $D(f) \subset U$. Como $\{A_f\}_{f \in T}$ es un sistema cofinal del diagrama

$$\{\Gamma(U, \mathcal{O}_X) \, / \, U \text{ es un abierto denso de } X\},$$

entonces se tiene que

$$\operatorname{Rat}(X) = \varinjlim_{f \in T} A_f \approxeq T^{-1}A.$$

□

## 1.2. Haz total de fracciones

El anillo de funciones racionales, a pesar de tener una estructura muy explícita no resulta adecuado para desarrollar una teoría de divisores sobre esquemas no reducidos. Esto se subsana con un invariante más fino, el haz total de fracciones. Hemos tomado la definición del haz total de fracciones dada por Kleiman en [**K1**] ya que la definición que aparece en la literatura de uso más frecuente, como en [**Ha1**, Definition, p. 140] y en [**EGA IV**$_4$, 20.I. Fonctions méromorphes], no es correcta (véase 1.2.10).

Definición. Sea $(X, \mathcal{O}_X)$ un esquema. Definimos el *haz total de fracciones de* $X$, y lo denotamos por $\mathcal{K}_X$, como el haz asociado al prehaz $\mathcal{K}_X^{\mathrm{p}}$ cuyo valor en un abierto $U \subset X$ es

$$U \longrightarrow \mathcal{K}_X^{\mathrm{p}}(U) = S(U)^{-1}\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$$

siendo

$$S(U) = \{s \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X) \,/\, s_p \text{ es no divisor de cero en } \mathcal{O}_{X,p}, \forall p \in U\}.$$

Observación. En general

$$S(U) \subset \{\text{no divisores de cero de } \Gamma(U, \mathcal{O}_X)\}.$$

Este contenido no tiene por qué ser una igualdad, pero en el caso afín sí se tiene esta identificación. En efecto, sea $U = \operatorname{Spec}(A)$, $a \in A$ un no divisor de cero y $\mathfrak{p}$ un ideal primo de $A$. Supongamos que $\frac{a}{1}$ es un divisor de cero en $A_{\mathfrak{p}}$. Entonces existe un elemento no nulo $\frac{b}{t} \in A_{\mathfrak{p}}$ tal que $\frac{b}{t}\frac{a}{1} = 0$. Es decir existe un elemento $t' \in A - \mathfrak{p}$ y tal que $t'ba = 0$ en $A$. Como $a$ es un no divisor de cero en $A$ se tiene que $t'b = 0$ y necesariamente $\frac{b}{t} = 0$ en $A_{\mathfrak{p}}$, lo cual es una contradicción.

Por tanto, para un abierto afín $U = \operatorname{Spec}(A)$ el valor del prehaz $\mathcal{K}_X^{\mathrm{p}}$ en $U$ coincide con el anillo total de fracciones de $A$, $\mathcal{K}_X^{\mathrm{p}}(U) = \operatorname{QTot}(A)$.

Proposición 1.2.1. *Dado $(X, \mathcal{O}_X)$ un esquema, el siguiente homomorfismo canónico de haces de $\mathcal{O}_X$-álgebras*

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{K}_X$$

*es inyectivo.*

Demostración. Como el proceso de hacificación es exacto se obtiene el resultado buscado como consecuencia de que el morfismo de prehaces

$$\mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{K}_X^{\mathrm{p}}$$

es la inclusión canónica

$$\Gamma(\operatorname{Spec}(A), \mathcal{O}_X) = A \longrightarrow \Gamma(\operatorname{Spec}(A), \mathcal{K}_X^{\mathrm{p}}) = \operatorname{QTot}(A),$$

en los abiertos afines $\operatorname{Spec}(A)$ de $X$. $\square$

Si $\mathcal{A}$ es un haz de álgebras definido sobre un espacio anillado $(X, \mathcal{O}_X)$, $\mathcal{A}^*$ denotará el haz de grupos de las unidades de $\mathcal{A}$.

Corolario 1.2.2. *Dado $(X, \mathcal{O}_X)$ un esquema, existe un homomorfismo canónico inyectivo de haces de grupos abelianos*

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X^* \longrightarrow \mathcal{K}_X^* .$$

Observación. Dado $X$ un esquema y $U$ un abierto de $X$ se tiene que

$$(\mathcal{K}_X)|_U = \mathcal{K}_U .$$

Proposición 1.2.3. *Sea $(X, \mathcal{O}_X)$ un esquema. Dado $p \in X$ se verifica que $\mathcal{K}_{X,p} = S_p^{-1}\mathcal{O}_{X,p}$ con $S_p = \varinjlim_{p \in U} S(U)$, donde $U$ recorre el conjunto de los entornos abiertos de $p \in X$.*

Demostración. Por la definición del haz total de fracciones sabemos que $\mathcal{K}_{X,p} = \varinjlim_{p \in U} S(U)^{-1}\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$. Se tienen entonces los siguientes diagramas conmutativos:

$$\begin{tikzcd}
\Gamma(U, \mathcal{O}_X) \arrow[r] \arrow[d] & S(U)^{-1}\Gamma(U, \mathcal{O}_X) \arrow[d] \\
\mathcal{O}_{X,p} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{K}_{X,p} \arrow[d, equal] \\
S_p^{-1}\mathcal{O}_{X,p} \arrow[r, "\phi"] & \mathcal{K}_{X,p}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\Gamma(U, \mathcal{O}_X) \arrow[r] \arrow[d] & S(U)^{-1}\Gamma(U, \mathcal{O}_X) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{K}_{X,p} \arrow[d, "\psi"'] \\
\mathcal{O}_{X,p} \arrow[r] & S_p^{-1}\mathcal{O}_{X,p} \arrow[r, equal] & S_p^{-1}\mathcal{O}_{X,p}
\end{tikzcd}$$

donde $\psi$ es la aplicación inducida por la propiedad universal del límite directo y $\phi$ es la aplicación inducida por la propiedad universal de la localización. Entonces son aplicaciones inversas. $\square$

Observación. Nótese que en general siempre se tiene que

$$\mathcal{K}_{X,p} \subset \mathrm{QTot}(\mathcal{O}_{X,p}).$$

TEOREMA 1.2.4. *Sea* $(X, \mathcal{O}_X)$ *un esquema localmente noetheriano y* $U = \operatorname{Spec}(A)$ *un abierto afín de* $X$*. Entonces:*

$$\Gamma(U, \mathcal{K}_X) \approxeq \operatorname{QTot}(A).$$

DEMOSTRACIÓN. Sin perder generalidad podemos suponer que $X = U = \operatorname{Spec}(A)$ es un esquema afín noetheriano. Para simplificar la notación escribiremos $K = \operatorname{QTot}(A)$.

El monomorfismo de anillos $A \longrightarrow K$ induce un morfismo de esquemas

$$Y = \operatorname{Spec}(K) \xrightarrow{\lambda} X = \operatorname{Spec}(A).$$

Sea $\mathfrak{q}$ un primo de $K$. Como los ideales primos de $K$ están en correspondencia biyectiva con los ideales primos de $A$ contenidos en el conjunto de los divisores de cero de $A$, resulta que $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap A$ es un primo asociado a cero de $A$, por ser $A$ noetheriano. Entonces dados $q \in Y$ y $p = \lambda(q) \in X$ se verifica que $\mathcal{O}_{Y,q} = \operatorname{QTot}(\mathcal{O}_{X,p}) = \mathcal{O}_{X,p}$. En particular $\mathcal{K}_Y^{\mathrm{p}} = \mathcal{O}_Y$ es un haz. Además el homomorfismo canónico $\mathcal{O}_X \longrightarrow \lambda_* \mathcal{O}_Y$ se extiende en este caso a un homomorfismo de prehaces

$$\mathcal{K}_X^{\mathrm{p}} \xrightarrow{\tau^{\mathrm{p}}} \lambda_* \mathcal{O}_Y\, .$$

Por ser $\mathcal{O}_Y$ un haz, $\lambda_* \mathcal{O}_Y$ es un haz y el proceso canónico de hacificación proporciona un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{K}_X^{\mathrm{p}} & \xrightarrow{\tau^{\mathrm{p}}} & \lambda_* \mathcal{O}_Y \\ {\scriptstyle \pi}\big\downarrow & & \big\| \\ \mathcal{K}_X & \xrightarrow{\tau} & \lambda_* \mathcal{O}_Y \end{array} \tag{1}$$

donde $\pi$ es el homomorfismo canónico de hacificación y $\tau$, la extensión de $\tau^{\mathrm{p}}$, es un monomorfismo. En efecto, para cualquier $p \in X$ el morfismo inducido en las fibras $\tau_p$ es inyectivo ya que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{K}_{X,p}^{\mathrm{p}} = \mathcal{K}_{X,p} = S_p^{-1} \mathcal{O}_{X,p} & \xrightarrow{\tau_p} & \displaystyle\varinjlim_{p \in D(f), f \in A} K_f \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ \operatorname{QTot}(\mathcal{O}_{X,p}) & = & \operatorname{QTot}(\mathcal{O}_{X,p}) \end{array}$$

donde el monomorfismo de la izquierda es la inclusión canónica.

Aplicando el funtor $\Gamma(X,-)$ al diagrama (1) se obtiene un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
\Gamma(X,\mathcal{K}_X^{\mathrm{p}}) & \xrightarrow{\mathrm{id}} & \Gamma(Y,\mathcal{O}_Y)=K \\
{\scriptstyle\pi}\big\downarrow & & \big\| \\
\Gamma(X,\mathcal{K}_X) & \xrightarrow{\tau} & \Gamma(Y,\mathcal{O}_Y)=K
\end{array}$$

donde $\tau$ es una aplicación inyectiva. Concluimos de esta forma que $\tau$ y el homomorfismo canónico $\pi : \Gamma(X,\mathcal{K}_X^{\mathrm{p}}) \longrightarrow \Gamma(X,\mathcal{K}_X)$ son isomorfismos. $\square$

Corolario 1.2.5. *Sea $A$ un anillo noetheriano y $S$ un subconjunto multiplicativo de $A$ que está formado por no divisores de cero. Consideremos $X=\mathrm{Spec}(A)$ e $Y=\mathrm{Spec}(S^{-1}A)$ y sean $\mathcal{K}_X$ y $\mathcal{K}_Y$ los haces totales de fracciones de $X$ e $Y$ respectivamente. Entonces*

$$\Gamma(X,\mathcal{K}_X) \longrightarrow \Gamma(Y,\mathcal{K}_Y)$$

*es biyectiva.*

Demostración. Basta considerar el siguiente diagrama conmutativo y el hecho de que $\mathrm{QTot}(A) \approxeq \mathrm{QTot}(S^{-1}A)$ ([**A**, p. 50])

$$\begin{array}{ccc}
A=\Gamma(X,\mathcal{O}_X) & \longrightarrow & S^{-1}A=\Gamma(Y,\mathcal{O}_Y) \\
\big\downarrow & & \big\downarrow \\
\mathrm{QTot}(A)=\Gamma(X,\mathcal{K}_X) & \longrightarrow & \mathrm{QTot}(S^{-1}A)=\Gamma(Y,\mathcal{K}_Y).
\end{array}$$

$\square$

Corolario 1.2.6. *Sea $X$ un esquema íntegro localmente noetheriano. Entonces $\mathcal{K}_X$ es el haz constante que en cada abierto toma el valor $\mathrm{Rat}(X)$, el cuerpo de funciones racionales de $X$.*

Ejemplo. Aunque $X$ sea un esquema irreducible localmente noetheriano el resultado anterior no siempre se verifica. Por ejemplo, sea $X=\mathrm{Spec}(A)$ donde $A$ es un anillo noetheriano con primos embebidos. Se tiene que $\Gamma(X,\mathcal{K}_X)=\mathrm{QTot}(A)$ por el Teorema 1.2.4 y sin embargo $\mathrm{Rat}(X) \approxeq T^{-1}A$ donde $T = A - \{$ primos minimales de A $\}$.

PROPOSICIÓN 1.2.7. *Sea $X$ un esquema localmente noetheriano. Entonces*

$$\mathcal{K}_{X,p} \approxeq \mathrm{QTot}(\mathcal{O}_{X,p})$$

*para todo $p \in X$.*

DEMOSTRACIÓN. Es consecuencia de que dado $A$ un anillo noetheriano y $\mathfrak{p}$ un primo de $A$, se tiene que

$$\mathrm{QTot}(A_{\mathfrak{p}}) \approxeq \varinjlim_{f \notin \mathfrak{p}} \mathrm{QTot}(A_f).$$

□

DEFINICIÓN. Llamamos asociados de $X$ al conjunto

$$\mathrm{Ass}(X) = \{p \in X \,/\, \mathfrak{m}_p \text{ es un ideal primo de } \mathcal{O}_{X,p} \text{ asociado al cero }\}.$$

DEFINICIÓN. Sea $X$ un esquema localmente noetheriano. Un abierto $U$ de $X$ se dice *esquemáticamente denso* si $\mathrm{Ass}(X) \subset U$ (*cfr.* [**EGA IV**$_4$, (11.10.2)]).

PROPOSICIÓN 1.2.8. *Si $U$ es un subconjunto de $X$ esquemáticamente denso, entonces $U$ es un subconjunto denso de $X$.*

DEMOSTRACIÓN. Por reducción al absurdo supongamos que existe $V$ un subconjunto abierto no vacío de $X$ contenido en $X - U$. Sea $p$ un punto en $V$. Entonces cualquier generalización de $p$ está en $V$, y en particular estará alguno de los asociados al cero; y esto es una contradicción. □

PROPOSICIÓN 1.2.9. *Sea $X$ un esquema localmente noetheriano. Entonces*

$$\mathcal{K}_X \approxeq j_* j^* \mathcal{O}_X$$

*donde $j$ es la inclusión de* $\mathrm{Ass}(X)$ *en $X$.*

DEMOSTRACIÓN. En realidad vamos a probar que los prehaces a partir de los cuáles se definen estos haces son isomorfos y por tanto se tiene lo mismo para los haces. Además, como es una cuestión local, podemos suponer que $X = \operatorname{Spec}(A)$. Entonces

$$\Gamma(X, \mathcal{K}_X) = \operatorname{QTot}(A) = \varinjlim_{f} A_f = \varinjlim_{D(f)} \Gamma(D(f), \mathcal{O}_X)$$

donde el límite directo está indicado por los $f \in A$ no divisores de cero. Por otra parte

$$\Gamma(X, j_*j^*\mathcal{O}_X) = \Gamma(\operatorname{Ass}(X), j^*\mathcal{O}_X) = \varinjlim_{V} \Gamma(V, \mathcal{O}_X)$$

donde $V$ recorre los abiertos esquemáticamente densos de $X$.

Por la propiedad universal del límite directo tenemos una aplicación inducida de $\Gamma(X, \mathcal{K}_X)$ en $\Gamma(X, j_*j^*\mathcal{O}_X)$. Para probar que es un isomorfismo, bastará ver que cada subconjunto esquemáticamente denso contiene un abierto principal $D(f)$ con $f$ no divisor de cero. Sea $U$ un abierto esquemáticamente denso y consideremos $Y$ su cerrado complementario. Entonces $Y = v(\mathfrak{I})$ donde $\mathfrak{I}$ es un ideal de $A$. Como $Y \cap \operatorname{Ass}(X) = \varnothing$, $\mathfrak{I} \subsetneq \mathfrak{p}$ para todo primo $\mathfrak{p}$ de $A$ asociado al cero. Por tanto existe un elemento $t \in \mathfrak{I}$ no divisor de cero en $A$. Como $Y \subset v(t)$ se verifica que $D(t) \subset U$. $\square$

1.2.10. Pese a que la definición propuesta de haz total de fracciones generaliza el haz total de funciones racionales y es adecuada para las aplicaciones, frecuentemente se producen confusiones. De hecho éstas han aparecido en la literatura, como en [**EGA IV**$_4$, 20.I. Fonctions méromorphes]. En concreto:

(1) $\mathcal{K}_X$ no es un haz cuasicoherente, aunque $X$ sea un esquema localmente noetheriano.
(2) El prehaz $\mathcal{K}_X^{\mathrm{p}}$ no tiene por qué ser un haz.
(3) Aunque $X$ sea un esquema afín, puede no ser $\mathcal{K}_{X,p} = \operatorname{QTot}(\mathcal{O}_{X,p})$.

Veamos a continuación ejemplos que ilustren las afirmaciones anteriores. Como se utilizará el producto semidirecto de anillos, recordaremos brevemente su definición: sea $R$ un anillo y $M$ un $R$-módulo.

Consideremos el grupo aditivo $R \oplus M$ y en él la multiplicación

$$(r, m) \cdot (r', m') = (rr', rm' + r'm)$$

donde $r, r' \in R; m, m' \in M$. Esta operación es bilineal, asociativa y con uno $((1, 0))$. Por tanto se tiene una estructura de anillo que se llama *producto semidirecto* y que denotaremos por $R \ltimes M$.

(1)

Ejemplo. [**EGA IV**$_4$, Remarques (20.2.13.)] Sea $A$ un anillo local noetheriano de dimensión mayor que 1, $X = \operatorname{Spec}(A)$ tal que el maximal $\mathfrak{m} \in \operatorname{Ass}(X)$. Sea $U = X - \{\mathfrak{m}\}$ con la estructura de subesquema abierto de $X$ tal que $U$ es un esquema íntegro (al final del ejemplo se demostrará la existencia de un esquema $X$ con dichas propiedades). Se tiene que $\mathcal{K}_X$ no es un haz cuasicoherente.

Los no divisores de cero de $A$ son las unidades de $A$, y por el Teorema 1.2.4 $\Gamma(X, \mathcal{K}_X) \approxeq \operatorname{QTot}(A) = A$. Por otra parte, como $U$ es un esquema íntegro, $\mathcal{K}_U$ es el haz constante, que en cada abierto vale $\operatorname{Rat}(U)$ el cuerpo de funciones racionales. Entonces $\mathcal{K}_{X,p}$ tiene la misma dimensión para todo $p \in U$. Si $\mathcal{K}_X$ fuese cuasicoherente, $\mathcal{K}_X \approxeq \widetilde{A} \approxeq \mathcal{O}_X$. Por ser la dimensión de $A$ mayor que 1, existe una cadena de ideales primos

$$\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \mathfrak{m}$$

con $\mathfrak{p}_0$, $\mathfrak{p}_1 \in U$. Las dimensiones de $A_{\mathfrak{p}_0}$ y $A_{\mathfrak{p}_1}$ son distintas y se llega a una contradicción.

Para justificar la existencia de un esquema con las hipótesis anteriores consideremos $B$ un dominio noetheriano local de dimensión mayor que 1, $\mathfrak{m}$ su ideal maximal y $k = B/\mathfrak{m}$ su cuerpo residual. Sea $A = B \ltimes k$ donde $\ltimes$ denota el producto semidirecto de $B$ y $k$. El anillo $A$ es local noetheriano de dimensión mayor que 1. Su ideal maximal es $\overline{\mathfrak{m}}$ (es el correspondiente a $\mathfrak{m}$, es decir, $\overline{\mathfrak{m}}$ es la contracción de $\mathfrak{m} \subset B$ a través del homomorfismo canónico $A \longrightarrow B$) y sus elementos son divisores de cero, es decir $\overline{\mathfrak{m}} \in \mathrm{Ass}(X)$ con $X = \mathrm{Spec}(A)$. Además, $U = X - \{\overline{\mathfrak{m}}\}$ es un esquema íntegro por ser sus fibras dominios (sus fibras son de la forma $B_{\mathfrak{p}}, \forall \mathfrak{p} \in U$).

(2)

Ejemplo. El prehaz $\mathcal{K}_X^{\mathrm{p}}$ no tiene porque ser un haz. Sea $X = \mathbb{P}_k^n$. Se tiene que $\mathcal{K}_X^{\mathrm{p}}(X) = k$. Por otra parte, por ser $X$ un esquema íntegro, el haz total de fracciones es constante y $\Gamma(X, \mathcal{K}_X) = \Gamma(U, \mathcal{K}_X) \approxeq k(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ con $U$ un abierto afín de $X$.

(3)

Ejemplo. [**K1**] Sea $B$ un dominio que posee un ideal primo no nulo $\mathfrak{p}$ que no es maximal y que es intersección de todos los ideales maximales $\mathfrak{m}$ que lo contienen (es un número infinito de ideales ya que si no, $\mathfrak{p}$ sería uno de ellos). Lllamaremos $K$ al cuerpo de fracciones de $B$. Sea $A = B \ltimes \bigoplus_{\mathfrak{p} \subset \mathfrak{m}} B/\mathfrak{m}$ y $X = \mathrm{Spec}(A)$. Denotaremos por $\overline{\mathfrak{a}}$ la contracción de un ideal $\mathfrak{a} \subset B$ a través del homomorfismo canónico $A \longrightarrow B$. El anillo $A$ no es noetheriano ya que el ideal $\overline{\mathfrak{p}}$ no está finitamente generado. Veamos que $\mathcal{K}_{X,p} \neq \mathrm{QTot}(\mathcal{O}_{X,p})$ siendo $p$ el punto que representa a $\overline{\mathfrak{p}}$.

Cada uno de los ideales $\overline{\mathfrak{m}}$ está formado por divisores de cero de $A$, ya que $(m, 0)$ con $m \in \mathfrak{m}$ aniquila a todos los elementos de la forma $(0, b)$ donde $b \in B/\mathfrak{m}$. Como $\mathfrak{p}$ no es maximal para cada uno de los $\mathfrak{m}$ existe un elemento $t \in \mathfrak{m} - \mathfrak{p}$ tal que $t(B/\mathfrak{m}) = 0$ y por tanto $A_{\overline{\mathfrak{p}}} = B_{\mathfrak{p}}$. Con lo cual

$$\mathrm{QTot}(A_{\overline{\mathfrak{p}}}) = \mathrm{QTot}(B_{\mathfrak{p}}) = \mathrm{QTot}(B) = K.$$

Por otra parte, dado $D(f) \subset X$ un entorno abierto del punto $p$, $S(D(f)) = \{a \in A_f \,/\, a$ es un no divisor de cero en $A_{\mathfrak{q}}, \forall \mathfrak{q} \in D(f)\}$. Dado $a \in S(D(f))$ existe $\mathfrak{m} \subset B$ maximal con $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{m}$ tal que $a \notin \overline{\mathfrak{m}} A_{\overline{\mathfrak{m}}}$ y entonces $a \notin \overline{\mathfrak{p}} A_{\overline{\mathfrak{p}}}$. Por tanto $\mathcal{K}_{X,p} = A_{\overline{\mathfrak{p}}} = B_{\mathfrak{p}}$.

## 1.3. Divisores de Weil

A lo largo de esta sección supondremos conocidos los resultados básicos acerca de los anillos de valoración discreta.

Definición. Un esquema $(X, \mathcal{O}_X)$ se dice *regular en codimensión uno* si todo anillo local $\mathcal{O}_{X,p}$ de dimensión uno es regular.

Ejemplo. Son regulares en codimensión uno:

(1) Las variedades no singulares sobre un cuerpo (las fibras son anillos locales regulares).
(2) Los esquemas noetherianos normales (un esquema es normal si todos sus anillos locales son dominios íntegramente cerrados).

A partir de ahora consideraremos la siguiente hipótesis:

Hipótesis 1.3.1. *$(X, \mathcal{O}_X)$ es un esquema noetheriano, íntegro, separado y regular en codimensión uno.*

Definición. Sea $Y$ un subesquema íntegro de $X$. Definimos la *codimensión* de $Y$ en $X$ como $\operatorname{codim}(Y, X) := \dim \mathcal{O}_{X,\eta}$ donde $\eta$ es el punto genérico de $Y$.

Definición. Un *divisor primo* en $X$ es un subesquema $Y \subset X$ cerrado, íntegro y de codimensión uno. Llamamos $\operatorname{Div}_W(X)$ al grupo abeliano libre generado por los divisores primos. Un *divisor de Weil* es un elemento de $\operatorname{Div}_W(X)$, es decir, un elemento de la forma $D = \Sigma n_i Y_i$, donde los $Y_i$ son divisores primos y $n_i \in \mathbb{Z}$. Si $n_i \geq 0$, $\forall i$, se dice que el divisor $D$ es *efectivo* y llamamos *soporte de $D$* a $\operatorname{Supp}(D) = \bigcup\limits_{n_i > 0} Y_i$.

Se puede comprobar fácilmente a partir de la definición que todo divisor de Weil es diferencia de divisores efectivos.

1.3.2. Escribiremos $D_1 \geq D_2$ cuando $D_1 - D_2$ sea un divisor efectivo. Con esta relación de orden $\operatorname{Div}_W(X)$ es un grupo ordenado.

Observación. Dado $Y$ un divisor primo y $\eta$ su punto genérico, por la Hipótesis 1.3.1, $\mathcal{O}_{X,\eta}$ es un anillo regular o, equivalentemente en este caso, un anillo de valoración discreta. Además resulta que su cuerpo cociente es $\mathrm{Rat}(X)$. A la correspondiente valoración la denotaremos por $\nu_Y$.

Definición. Sea $f \in \mathrm{Rat}(X)^*$ e $Y$ un divisor primo. Si $\nu_Y(f) > 0$ se dice que $f$ tiene un *cero* en $Y$ de orden $\nu_Y(f)$. Obsérvese que, en este caso $f \in \mathfrak{m}_{X,\eta}$ siendo $\eta$ el punto genérico de $Y$. Si $\nu_Y(f) < 0$ se dice que $f$ tiene un *polo* en $Y$ de orden $-\nu_Y(f)$. En este caso se tiene que $\frac{1}{f} \in \mathfrak{m}_{X,\eta}$.

Lema 1.3.3. *Sea $X$ un esquema verificando la Hipótesis 1.3.1 y $f \in \mathrm{Rat}(X)^*$. Entonces existe un número finito de divisores primos*

$$Y_1, Y_2, \dots, Y_r$$

*para los cuales $\nu_Y(f) \neq 0$.*

Demostración. Sea $U$ un abierto afín de X tal que $f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ y sea $Z$ el cerrado complementario. Como $X$ es noetheriano, en $Z$ hay a lo sumo un número finito de divisores primos ($Z$ es un cerrado propio). Por tanto, el resto de los divisores de $X$ han de cortar necesariamente a $U$. Para probar el lema será suficiente ver que existen un número finito de divisores primos $Y$ en $U$ tal que $\nu_Y(f) \neq 0$ (se tiene en general que $\nu_Y(f) \geq 0$). En efecto, $\nu_Y(f) > 0$ si, y sólo si, $Y \subset v(f)$. Y como $v(f)$ es un cerrado propio de $U$ (ya que $f \neq 0$), sólo contiene un número finito de divisores primos de $U$. $\square$

Definición. Sea $X$ verificando la Hipótesis 1.3.1 y sea $f \in \mathrm{Rat}(X)^*$. Definimos el divisor de $f$ como

$$\mathrm{div}_W(f) = \sum_Y \nu_Y(f) Y$$

donde $Y$ recorre el conjunto de divisores primos de $X$ (por el lema anterior está bien definido).

Cualquier divisor que es igual al divisor de una función racional se llama *divisor principal*.

Proposición 1.3.4. *La aplicación* $\mathrm{div}_W : \mathrm{Rat}(X)^* \longrightarrow \mathrm{Div_W}(X)$ *es un homomorfismo de grupos.*

DEMOSTRACIÓN. En efecto, dados $f, g$ en $\mathrm{Rat}(X)^*$ se tiene que

$$\mathrm{div}_W(\tfrac{f}{g}) = \Sigma\nu_Y(\tfrac{f}{g})Y = \Sigma(\nu_Y(f) - \nu_Y(g))Y$$
$$= \Sigma\nu_Y(f)Y - \Sigma\nu_Y(g)Y = \mathrm{div}_W(f) - \mathrm{div}_W(g).$$

□

COROLARIO 1.3.5. *El conjunto de los divisores principales son un subgrupo de* $\mathrm{Div}_{\mathrm{W}}(X)$ *(por ser el conjunto imagen de un homomorfismo de grupos).*

DEFINICIÓN. Sea X un esquema verificando la Hipótesis 1.3.1. Dos divisores $D_1$ y $D_2$ son *linealmente equivalentes*, y se denota $D_1 \sim D_2$, si $D_1 - D_2$ es un divisor principal. Así $D \sim 0$ si y sólo si $D$ es un divisor principal. Esta relación de equivalencia define un grupo cociente de $\mathrm{Div}_{\mathrm{W}}(X)$ que se denota por $\mathrm{Cl}(X)$ y se llama el *grupo de clases de divisores de Weil.*

EJEMPLO. Veamos cómo son los divisores primos en el espacio afín y en el espacio proyectivo (ambos verifican la Hipótesis 1.3.1).

(1) Sea $X = \mathbb{A}_k^n = \mathrm{Spec}(k[X_1, X_2, \ldots, X_n])$.

Por ser $k[X_1, X_2, \ldots, X_n]$ un dominio de factorización única los divisores primos son de la forma $v(F)$ donde $F$ es un polinomio irreducible en $k[X_1, X_2, \ldots, X_n]$. Por lo tanto, cualquier polinomio en $k[X_1, X_2, \ldots, X_n]$ determina un divisor efectivo en $X$ y entonces, todos los divisores son principales, con lo que $\mathrm{Cl}(\mathbb{A}_k^n) = 0$.

(2) Sea $X = \mathbb{P}_k^n = \cup_{i=0}^n D_+(X_i)$.

Consideremos $F(X_0, X_1, \ldots, X_n)$ un polinomio irreducible homogéneo de grado $r$ y sean $f_i = \frac{F}{X_i^r}$. Tenemos que $v(f_i)$ es un cerrado de $D_+(X_i)$ tal que en $D_+(X_i) \cap D_+(X_j)$, $v(f_i)$ y $v(f_j)$ coinciden. Entonces $\cup_{i=o}^n v(f_i)$ determina un cerrado en $X$ que denotaremos por $v_+(F)$. Como $F$ es irreducible $v_+(F)$ es un cerrado irreducible y además tiene codimensión uno. Es decir, $v_+(F)$ es un divisor primo de $X$.

Recíprocamente, sea $Y$ un divisor primo en $X$ y fijemos $X_0$.

- Si $Y \cap D_+(X_0) = \varnothing$ , resulta que $Y \subset v_+(X_0)$ y por ser $Y$ un cerrado irreducible de codimensión uno ha de ser $Y = v_+(X_0)$.
- En caso contrario, $Y \cap D_+(X_0)$ es un divisor primo en $D_+(X_0)$. Ahora estamos en el caso afín y podemos utilizar los resultados del ejemplo anterior; $Y \cap D_+(X_0) = v(f_0)$ con $f_0$ un polinomio irreducible en $k[\frac{X_1}{X_0}, \ldots, \frac{X_n}{X_0}]$ de grado $r$. Consideremos $F = f_0 X_0^r \in k[X_0, X_1, \ldots, X_n]$. Se tiene que $F$ determina un divisor primo en $X$, $v_+(F)$, y como $Y$ y $v_+(F)$ coinciden en $D_+(X_0)$ resulta que son el mismo.

De estas últimas consideraciones podemos deducir lo siguiente: el polinomio $f_0$ determina una función racional en $X$ y entonces

$$\operatorname{div}(f_0) = v_+(F) - r \cdot v_+(X_0).$$

Con lo cual, $v_+(F) \sim r{\cdot}v_+(X_0)$. Estamos diciendo que cualquier divisor en $X$ es linealmente equivalente a $r \cdot v_+(X_0)$ donde $r$ es un número entero. En consecuencia se tiene el isomorfismo de grupos $\mathrm{Cl}(\mathbb{P}_k^n) \approxeq \mathbb{Z}$.

El siguiente resultado se utilizará en la demostración de la Proposición 1.3.7 que ilustra la interrelación entre propiedades aritméticas y geométricas expresadas por el grupo de clases de divisores de Weil.

Proposición 1.3.6. [**Ma1**, Theorem 38] *Sea $A$ un dominio noetheriano íntegramente cerrado. Entonces*

$$A = \bigcap_{ht\mathfrak{p}=1} A_{\mathfrak{p}}$$

*donde la intersección recorre todos los primos de altura uno de $A$.*

Proposición 1.3.7. *Sea $A$ un dominio noetheriano. Entonces $A$ es un dominio de factorización única si, y sólo si, $X = \mathrm{Spec}(A)$ es normal y $\mathrm{Cl}(X) = 0$.*

Demostración. Se sabe que si $A$ es un dominio de factorización única, entonces es íntegramente cerrado ([**Ma2**, Example 1, p. 65]).

Por [**A**, Proposición 5.13] el anillo $A$ es íntegramente cerrado si, y sólo si, $A_{\mathfrak{p}}$ es íntegramente cerrado para todo primo $\mathfrak{p}$ en $A$; lo cuál es equivalente a decir que $X$ es normal.

Por otra parte, $A$ es un dominio de factorización única si, y sólo si, todo ideal primo de altura uno en $A$ es principal ([**Ma2**, Theorem 20.1]). Supongamos que $A$ es un dominio íntegramente cerrado. Bastará probar que todo primo de altura uno en $A$ es principal si, y sólo si, $\mathrm{Cl}(X) = 0$.

En efecto, sea $Y$ un divisor primo de $X$ y probemos que es un divisor principal. Por ser un cerrado irreducible le corresponde biunívocamente un ideal primo $\mathfrak{p}$ de $A$ (que es el punto genérico de $Y$). Como la codimensión de $Y$ es uno, resulta que $\dim A_{\mathfrak{p}} = 1$, es decir, que la altura de $\mathfrak{p}$ es uno. Por hipótesis, $\mathfrak{p}$ es un ideal principal; supongamos, por ejemplo, que $\mathfrak{p} = (f)$ donde $f \in A$. Podemos considerar $f$ como un elemento de $\mathrm{Rat}(X)^*$. Llamamos

$$\mathrm{div}_W(f) = \Sigma \nu_Y(f) Y.$$

Resulta que $\nu_{Y'}(f) = 0$ para todo $Y'$ divisor primo de $X$ distinto de $Y$, ya que en caso contrario se contradice la hipótesis de que $\mathfrak{p}$ es un ideal primo de altura uno. Además como $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ es el maximal de $A_{\mathfrak{p}}$ y $\mathfrak{p} = (f)$, se tiene que $\nu_Y(f) = 1$ y por tanto

$$\mathrm{div}_W(f) = 1 \cdot Y.$$

Recíprocamente, supongamos que $\mathrm{Cl}(X) = 0$ y sea $\mathfrak{p}$ un primo de altura uno. Consideremos $Y$ el cerrado irreducible que tiene como punto genérico $\mathfrak{p}$. Entonces $Y$ es un divisor primo de $X$ y existe $f \in \mathrm{Rat}(X)^*$ tal que $Y = \mathrm{div}_W(f)$. Veamos que $f \in A$ y que $\mathfrak{p} = (f)$. Como $\nu_Y(f) = 1$ se tiene que $f \in A_{\mathfrak{p}}$ y $(f) = \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ que es el maximal de $A_{\mathfrak{p}}$. Sea $\mathfrak{p}'$ otro ideal primo en $A$ de altura uno y consideremos el correspondiente divisor primo $Y'$. Por ser $Y = \mathrm{div}_W(f)$, $\nu_{Y'}(f) = 0$ y por tanto $f$ está en $A_{\mathfrak{p}'}$. Aplicando la Proposición 1.3.6 resulta que $f \in A$. La situación ahora es que $f$ está en $A$ y en $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$, y por tanto en $\mathfrak{p}$. Para demostrar que $f$ genera $\mathfrak{p}$, consideremos $g$ un elemento en $\mathfrak{p}$. Entonces $\nu_Y(g) \geq 1$ y $\nu_{Y'}(g) \geq 0$ para todo divisor primo $Y'$ distinto de

$Y$. De aquí se deduce que $\nu_{Y'}(\frac{g}{f}) \geq 0$ con lo cual $\frac{g}{f} \in A_{\mathfrak{p}'}$ para cualquier ideal $\mathfrak{p}'$ de altura uno de A. Aplicando de nuevo la Proposición 1.3.6 tenemos que $\frac{g}{f} \in A$, es decir $g \in (f)$. □

COROLARIO 1.3.8. *Sea $Y$ un divisor primo en una variedad $X$ localmente factorial. Entonces $Y$ es localmente principal, es decir, existe un recubrimiento abierto afín de $X$, $\{U_i\}_{i\in I}$ tal que $Y \cap U_i = v(f_i)$ para algún $f_i$ en* $\Gamma(U_i, \mathcal{O}_X)$.

## 1.4. El grupo de Picard. Caracterización cohomológica

Supondremos $(X, \mathcal{O}_X)$ un espacio anillado.

DEFINICIÓN. Un $\mathcal{O}_X$-Módulo $\mathcal{F}$ es *libre* si es isomorfo a una suma directa de copias de $\mathcal{O}_X$.

Decimos que $\mathcal{F}$ es un $\mathcal{O}_X$-Módulo *localmente libre* si existe un recubrimiento abierto $\{U_i\}_{i\in I}$ de $X$ tal que $\mathcal{F}|_{U_i}$ es un $\mathcal{O}_{U_i}$-Módulo libre. A cada uno de los abiertos del recubrimiento $\{U_i\}_{i\in I}$ le llamamos *abierto de trivialidad de* $\mathcal{F}$.

Si $U_i$ es un abierto de trivialidad de $\mathcal{F}$, entonces $\mathcal{F}|_{U_i} \approxeq \bigoplus_{j\in J_i} \mathcal{O}_{U_i}$. Llamaremos *rango* de $\mathcal{F}$ en el abierto $U_i$ al cardinal del conjunto $J_i$. Cuando dicho rango es finito e igual a $n$ en todos los abiertos del recubrimiento, se dice que $\mathcal{F}$ es un *haz localmente libre de rango* $n$. En el caso en que $n = 1$ estaremos hablando de los *haces inversibles.*

OBSERVACIÓN. De la definición se deduce que si $\mathcal{O}_X$ es un haz coherente (por ejemplo, en el caso noetheriano), todo haz localmente libre de rango finito es un haz coherente (por ser localmente suma directa de coherentes). En particular, los haces inversibles son haces coherentes.

OBSERVACIÓN. También a partir de la definición se ve fácilmente que si $\mathcal{E}$ es un haz localmente libre el funtor $\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} -$ es exacto.

Si $\mathcal{E}$ es un $\mathcal{O}_X$-Módulo, $\mathcal{E}^\vee$ denotará el $\mathcal{O}_X$-Módulo $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}, \mathcal{O}_X)$.

PROPOSICIÓN 1.4.1. *Sean $\mathcal{E}$ y $\mathcal{F}$ $\mathcal{O}_X$-Módulos. Existe un homomorfismo canónico*

$$\phi : \mathcal{E}^\vee \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}, \mathcal{F}),$$

*definido localmente por*

$$u \otimes t \rightsquigarrow [s \rightsquigarrow u(s)t].$$

*Además si alguno de los dos haces es localmente libre de rango finito, entonces $\phi$ es un isomorfismo.*

DEMOSTRACIÓN. Como es una cuestión local podemos suponer $\mathcal{E} \approxeq \mathcal{O}_X^n$, de donde $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}, \mathcal{O}_X) \approxeq \mathcal{O}_X^n$. Resulta sencillo comprobar que $\phi$ corresponde localmente a la composición de los isomorfismos canónicos

$$\begin{gathered} \mathcal{O}_X^n \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F} \approxeq (\mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F})^n \approxeq \mathcal{F}^n \\ \approxeq (\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X, \mathcal{F}))^n \approxeq \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X^n, \mathcal{F}) \approxeq \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}, \mathcal{F}). \end{gathered}$$

□

PROPOSICIÓN 1.4.2. *El producto tensor de haces inversibles es un haz inversible.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}'$ dos haces inversibles. Sea $\{U_i\}_{i \in I}$ un refinamiento adecuado de los recubrimientos por abiertos de trivialidad de ambos haces, entonces

$$(\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}')|_{U_i} \approxeq \mathcal{L}|_{U_i} \otimes \mathcal{L}'|_{U_i} \approxeq \mathcal{O}_{U_i} \otimes \mathcal{O}_{U_i} \approxeq \mathcal{O}_{U_i}\,.$$

□

PROPOSICIÓN 1.4.3. *Sea $\mathcal{L}$ un haz inversible. Entonces*

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}, \mathcal{L}) \approxeq \mathcal{O}_X\,.$$

DEMOSTRACIÓN. El morfismo canónico

$$\mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}, \mathcal{L}),$$

para cualquier abierto $V$ de $X$, se define como sigue:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X(V) & \longrightarrow & \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X|_V}(\mathcal{L}|V, \mathcal{L}|V) \\ s & \rightsquigarrow & t \rightsquigarrow s \cdot t. \end{array}$$

Para comprobar que es un isomorfismo basta restringirnos a un abierto de trivialidad $U$ de $\mathcal{L}$. Por comodidad, podemos suponer que $U = X$. En este caso $\mathcal{L} \approxeq \mathcal{O}_X$ y el resultado se sigue inmediatamente. □

Como consecuencia de los dos anteriores resultados se obtiene que

Corolario 1.4.4. *Dado $\mathcal{L}$ un haz inversible en $X$ se tiene que*

$$\mathcal{L}^\vee \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L} \approxeq \mathcal{O}_X \,.$$

Demostración. Por la Proposición 1.4.1 tenemos que

$$\mathcal{L}^\vee \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L} \approxeq \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}, \mathcal{L}).$$

y la conclusión se sigue del resultado anterior. □

Definición. Para un espacio anillado $(X, \mathcal{O}_X)$ se define el *grupo de Picard* de $X$ y lo denotaremos por $\mathrm{Pic}(X)$, como el grupo[1] de las clases de isomorfía de los haces inversibles en $X$ con la operación $\otimes$ :

- La operación es interna.
- El elemento neutro es $\mathcal{O}_X$.
- Dado $\mathcal{L}$ un haz inversible $\mathcal{L}^{-1} := \mathcal{L}^\vee$.
- Y además es un grupo conmutativo.

Observación. Dado $\varphi : X \longrightarrow X'$ un morfismo de espacios anillados, si $\mathcal{E}$ es un $\mathcal{O}_{X'}$-Módulo localmente libre (de rango $n$) entonces $f^*\mathcal{E}$ es un $\mathcal{O}_X$-Módulo localmente libre (de rango $n$). En particular, se tiene un homomorfismo canónico

$$\varphi^* : \mathrm{Pic}(X') \longrightarrow \mathrm{Pic}(X).$$

1.4.5. A continuación caracterizaremos cohomológicamente el grupo de Picard.

[1] Es fácil comprobar que la clase de las clases de isomorfía de los haces inversibles de un espacio anillado es, de hecho, un conjunto.

Recordemos que dado $X$ un espacio topológico, $\mathfrak{U}$ un recubrimiento abierto de $X$ y $\mathcal{F}$ un haz de grupos abelianos sobre $X$, el grupo $p$-ésimo de cohomología de Čech de $\mathcal{F}$ respecto al recubrimiento $\mathfrak{U}$, $\check{H}^p(\mathfrak{U},\mathcal{F})$, se define como $H^p(\Gamma(X,\mathcal{C}^{\cdot}(\mathfrak{U},\mathcal{F}))) = H^p(C^{\cdot}(\mathfrak{U},\mathcal{F}))$ donde $C^{\cdot}(\mathfrak{U},\mathcal{F})$ es el complejo de Čech de $\mathcal{F}$ y $\mathcal{C}^{\cdot}(\mathfrak{U},\mathcal{F})$ es la versión en haces de dicho complejo (véase, por ejemplo, [**Ha1**, Chapter III, p. 219, 220]).

Definición. Sea $X$ un espacio topológico, $\mathcal{F}$ un haz de grupos abelianos sobre $X$ y $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento abierto de $X$. Un *refinamiento* de $\mathfrak{U}$ es un recubrimiento abierto $\mathfrak{V} = \{V_j\}_{j\in J}$ de $X$ junto con una aplicación $\lambda : J \longrightarrow I$ tal que $\forall j \in J$, $V_j \subset U_{\lambda(j)}$.

Lema 1.4.6. *Sea $X$ un espacio topológico y $\mathcal{F}$ un haz de grupos abelianos sobre $X$. Si $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ es un recubrimiento de $X$ y $\mathfrak{V} = \{V_j\}_{j\in J}$ es un refinamiento de $\mathfrak{U}$ se tiene una aplicación funtorial*

$$\lambda^p : \check{H}^p(\mathfrak{U},\mathcal{F}) \longrightarrow \check{H}^p(\mathfrak{V},\mathcal{F}), \qquad \forall p \geq 0.$$

Demostración. Para cada $p \geq 0$ se definen las aplicaciones

$$\overline{\lambda^p} : C^p(\mathfrak{U},\mathcal{F}) \longrightarrow C^p(\mathfrak{V},\mathcal{F})$$

inducidas por la familia de morfismos siguiente: si existen $j_0,\dots,j_p$ con $\lambda(j_0) = i_0,\dots,\lambda(j_p) = i_p$ entonces la aplicación

$$\mathcal{F}(U_{i_0\dots i_p}) \longrightarrow \mathcal{F}(V_{j_0\dots j_p})$$

es el homomorfismo restrición y, en caso contrario se considera el homomorfismo nulo. Se comprueba fácilmente que la familia de homomorfismos $(\overline{\lambda^p})_{p\geq 0}$ conmuta con las diferenciales y, por tanto, inducen homomorfismos entre los grupos de cohomología

$$\lambda^p : \check{H}^p(\mathfrak{U},\mathcal{F}) \longrightarrow \check{H}^p(\mathfrak{V},\mathcal{F}), \qquad \forall p \geq 0.$$

$\square$

1.4.7. Dados dos recubrimientos de un espacio topológico $X$ siempre existe un recubrimiento que refina a ambos. Entonces los recubrimientos de $X$ forman un sistema dirigido y se define $\check{H}^p(X,\mathcal{F})$ como $\varinjlim_{\mathfrak{U}} \check{H}^p(\mathfrak{U},\mathcal{F})$ donde $\mathfrak{U}$ recorre todos los recubrimientos de $X$.

LEMA 1.4.8. *Sea $X$ un espacio topológico, $\mathcal{F}$ un haz de grupos abelianos sobre $X$ y $\mathfrak{U}$ un recubrimiento abierto de $X$. Los morfismos canónicos (*[**Ha1**, Chapter III, Lemma 4.4]*)*

$$\check{H}^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow H^p(X, \mathcal{F}), \qquad \forall p \geq 0$$

*son compatibles con el sistema dirigido anterior.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{J}^{\cdot}$ una resolución inyectiva de $\mathcal{F}$, $\mathfrak{U}$ un recubrimiento de $X$ y $\mathfrak{V}$ un refinamiento de $\mathfrak{U}$. Como $\mathcal{C}^{\cdot}(\mathfrak{U}, \mathcal{F}), \mathcal{C}^{\cdot}(\mathfrak{V}, \mathcal{F})$ son resoluciones de $\mathcal{F}$ ([**Ha1**, Chapter III, Lemma 4.2]) se tiene el siguiente diagrama conmutativo salvo homotopía ([**HS**, Proposition 4.2])

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathcal{C}^{\cdot}(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \arrow[r, "\overline{\lambda}"] \arrow[d, "\Phi_{\mathfrak{U}}"'] & \mathcal{C}^{\cdot}(\mathfrak{V}, \mathcal{F}) \arrow[d, "\Phi_{\mathfrak{V}}"'] & \mathcal{F} \arrow[l] \arrow[d, equal] \\
\mathcal{F} \arrow[r] & \mathcal{J}^{\cdot} \arrow[r, equal] & \mathcal{J}^{\cdot} & \mathcal{F} \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

que proporciona para cada $p \in \mathbb{N}$ un diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
H^p(\Gamma(X, \mathcal{C}^{\cdot}(\mathfrak{U}, \mathcal{F})) \arrow[r, "\lambda^p"] \arrow[d] & H^p(\Gamma(X, \mathcal{C}^{\cdot}(\mathfrak{V}, \mathcal{F})) \arrow[d] \\
H^p(\Gamma(X, \mathcal{J}^{\cdot})) \arrow[r, equal] & H^p(\Gamma(X, \mathcal{J}^{\cdot})).
\end{tikzcd}$$

□

COROLARIO 1.4.9. *Dado $X$ un espacio topológico y $\mathcal{F}$ un haz de grupos abelianos sobre $X$, se tiene una aplicación natural*

$$\check{H}^p(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\varphi^p} H^p(X, \mathcal{F}), \qquad \forall p \geq 0.$$

Obsérvese que $\check{H}^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = H^0(X, \mathcal{F})$ para cualquier recubrimiento $\mathfrak{U}$ de $X$, de modo que $\varphi^0 = 1$.

TEOREMA 1.4.10. *Sea $X$ un espacio topológico y $\mathcal{F}$ un haz de grupos abelianos sobre $X$. Entonces la aplicación natural*

$$\check{H}^1(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\varphi^1} H^1(X, \mathcal{F})$$

*es un isomorfismo.*

Demostración. Embebiendo $\mathcal{F}$ en un haz flasgo $\mathcal{G}$ se obtiene una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{F} \mathcal{G} \xrightarrow{G} \mathcal{E} \longrightarrow 0 \tag{2}$$

que induce una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \Gamma(X,\mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma(X,\mathcal{G}) \longrightarrow \Gamma(X,\mathcal{E}) \longrightarrow H^1(X,\mathcal{F}) \longrightarrow 0. \tag{3}$$

Sea $\mathfrak{U}$ un recubrimiento por abiertos de $X$. La sucesión (2) induce una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow C^{\cdot}(\mathfrak{U},\mathcal{F}) \xrightarrow{F_{\mathfrak{U}}} C^{\cdot}(\mathfrak{U},\mathcal{G}) \xrightarrow{G_{\mathfrak{U}}} C^{\cdot}(\mathfrak{U},\mathcal{E}).$$

Sea $D^{\cdot}(\mathfrak{U})$ el conúcleo del morfismo de complejos $F_{\mathfrak{U}}$ y

$$C^{\cdot}(\mathfrak{U},\mathcal{G}) \twoheadrightarrow D^{\cdot}(\mathfrak{U}) \overset{\Psi_{\mathfrak{U},\mathcal{E}}}{\rightarrowtail} C^{\cdot}(\mathfrak{U},\mathcal{E})$$

la correspondiente factorización de $G_{\mathfrak{U}}$ y

$$H^p(D^{\cdot}(\mathfrak{U})) \longrightarrow \check{H}^p(X,\mathcal{E}), \qquad \forall p \geq 0,$$

el morfismo asociado entre los grupos de cohomología.

Por otra parte, como $\mathcal{G}$ es un haz flasgo se verifica que $\check{H}^p(X,\mathcal{G}) = 0$ ([**Ha1**, Chapter III, Proposition 4.3]) y se tiene la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \Gamma(X,\mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma(X,\mathcal{G}) \longrightarrow H^0(D^{\cdot}(\mathfrak{U})) \longrightarrow \check{H}^1(\mathfrak{U},\mathcal{F}) \longrightarrow 0 \tag{4}$$

inducida por la sucesión exacta corta de complejos

$$0 \longrightarrow C^{\cdot}(\mathfrak{U},\mathcal{F}) \longrightarrow C^{\cdot}(\mathfrak{U},\mathcal{G}) \longrightarrow D^{\cdot}(\mathfrak{U}) \longrightarrow 0.$$

Tomando límites directos en (3) y (4) se obtiene el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\Gamma(X,\mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \Gamma(X,\mathcal{G}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \varinjlim_{\mathfrak{U}} H^0(D^{\cdot}(\mathfrak{U})) \arrow[r] \arrow[d, "\Phi_{\mathfrak{U},\mathcal{E}}"'] & \check{H}^1(X,\mathcal{F}) \arrow[d, "\varphi^1"'] \\
\Gamma(X,\mathcal{F}) \arrow[r] & \Gamma(X,\mathcal{G}) \arrow[r] & \Gamma(X,\mathcal{E}) \arrow[r] & H^1(X,\mathcal{F})
\end{tikzcd}$$

donde $\Phi_{\mathfrak{U},\mathcal{E}}$ es el homomorfismo inducido por el morfismo $\Psi_{\mathfrak{U},\mathcal{E}}$ y $\varphi^1$ es el inducido por la familia de homomorfismos $\check{H}^1(\mathfrak{U},\mathcal{F}) \longrightarrow H^1(X,\mathcal{F})$

indicada por los recubrimientos $\mathfrak{U}$ de $X$ ([**Ha1**, Chapter III, Lemma 4.4]).

Veamos que el monomorfismo $\Phi_{\mathfrak{U},\mathcal{E}}$ es un epimorfismo y por tanto $\varphi^1$ es un isomorfismo. En efecto, sea $\alpha \in \Gamma(X,\mathcal{E}) = H^0(X,\mathcal{E})$. Identificamos $\alpha$ con un elemento $(\alpha_i)_{i\in I} \in C^0(\mathfrak{U},\mathcal{E})$ donde $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ es un recubrimiento abierto arbitrario de $X$. Para cada $x \in X$ existe un índice $i_x \in I$ tal que $x \in U_{i_x}$ y $\alpha_{i_x} \in \Gamma(U_{i_x},\mathcal{E})$. Dado que $\mathcal{G} \xrightarrow{G} \mathcal{E}$ es un epimorfismo, para cada $x \in X$ existe un entorno $x \in V_{\alpha_{i_x}} \subset U_{i_x} \subset X$ y una sección $\beta_x \in \Gamma(V_{\alpha_{i_x}},\mathcal{G})$ tal que $G(\beta_x) = \alpha_{i_x}|_{V_{\alpha_{i_x}}}$. Sea $\beta = (\beta_x)_{x\in X}$. El recubrimiento $\mathfrak{V} = \{V_{\alpha_{i_x}}\}_{x\in X}$ es un refinamiento de $\mathfrak{U}$ y la aplicación

$$\overline{\lambda^0} : C^0(\mathfrak{U},\mathcal{E}) \longrightarrow C^0(\mathfrak{V},\mathcal{E})$$

verifica que $\overline{\lambda^0}(\alpha) = G(\beta) \in D^0(\mathfrak{V}) \hookrightarrow H^0(D^{\cdot}(\mathfrak{U}))$. Entonces $\Phi_{\mathfrak{U},\mathcal{E}}(\overline{\beta})$ $= \alpha$ con $\overline{\beta}$ la imagen de $G(\beta)$ en $\varinjlim_{\mathfrak{U}} H^0(D^{\cdot}(\mathfrak{U}))$. □

Teorema 1.4.11. [**EGA I**, (5.6.3)] *Sea $(X,\mathcal{O}_X)$ un espacio anillado. Entonces*

$$\mathrm{Pic}(X) \approxeq H^1(X,\mathcal{O}_X^*)$$

*siendo $\mathcal{O}_X^*$ el haz de grupos abelianos de las unidades de $\mathcal{O}_X$.*

Demostración. Por el Teorema 1.4.10

$$\check{H}^1(X,\mathcal{F}) \approxeq H^1(X,\mathcal{F})$$

y, por tanto, será suficiente identificar $\mathrm{Pic}(X)$ con $\check{H}^1(X,\mathcal{F})$. Dado $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento abierto de $X$ llamaremos $\mathrm{Pic}_{\mathfrak{U}}(X)$ al siguiente subgrupo de $\mathrm{Pic}(X)$

$$\{\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}(X) \,/\, \mathcal{L}|_{U_i} \approxeq \mathcal{O}_X|_{U_i} \ \forall i \in I\}.$$

Dado $f = (f_{ij})_{i,j\in I} \in Z^1(\mathfrak{U},\mathcal{O}_X^*)$ definimos un haz inversible $\mathcal{L}(f) \in \mathrm{Pic}_{\mathfrak{U}}(X)$ de la siguiente forma: en cada $U_i$ se tiene el haz $\mathcal{O}_{U_i}$ y consideramos los isomorfismos

$$\varphi_{ij} : \mathcal{O}_{U_i}|_{U_i\cap U_j} \longrightarrow \mathcal{O}_{U_j}|_{U_i\cap U_j}$$

que proceden de los elementos $f_{ij} \in \Gamma(U_i\cap U_j,\mathcal{O}_X^*)$ mediante el isomorfismo $\mathrm{Aut}(\mathcal{O}_{U_i\cap U_j}) \approxeq \Gamma(U_i\cap U_j,\mathcal{O}_X^*)$. Estos isomorfismos $\varphi_{ij}$ verifican:

(1) $\varphi_{ii} = 1$

(2) $\varphi_{ik} = \varphi_{jk} \circ \varphi_{ij}$ en $U_i \cap U_j \cap U_k$ (para comprobarlo basta escribir la condición de cociclo con las secciones $f_{ik}, f_{jk}, f_{ij} \in \Gamma(U_i \cap U_j \cap U_k, \mathcal{O}_X^*)$).

Recolectando los haces $\mathcal{O}_{U_i}$ mediante los isomorfismos $\varphi_{ij}$, existe un único haz $\mathcal{L}(f) \in \mathrm{Pic}_{\mathfrak{U}}(X)$ con isomorfismos de trivialización $\varphi_i : \mathcal{L}(f) \longrightarrow \mathcal{O}_{U_i}$ tal que $\varphi_j = \varphi_{ij} \circ \varphi_i$ en $U_i \cap U_j$.

La aplicación definida

$$\begin{array}{ccc} Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_X^*) & \xrightarrow{\phi_{\mathfrak{U}}} & \mathrm{Pic}_{\mathfrak{U}}(X) \\ f & \rightsquigarrow & \mathcal{L}(f) \end{array}$$

es un homomorfismo de grupos. Consideremos $f = (f_{ij})_{i,j \in I}$, $f' = (f'_{ij})_{i,j \in I} \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_X^*)$. Llamamos $\varphi_i, \varphi'_i$ a los isomorfismos de trivialización de $\mathcal{L}(f)$ y $\mathcal{L}(f')$, respectivamente. Y sean $\varphi_{ij}, \varphi'_{ij}$ los automorfismos de $\mathcal{O}_{U_i \cap U_j}$ que se corresponden con $f_{ij}, f'_{ij}$, respectivamente. Consideremos el elemento $f \cdot f' = (f_{ij} \cdot f'_{ij})_{i,j \in I} \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_X^*)$ y sea $\mathcal{L}(f \cdot f')$ su imagen mediante la aplicación $\phi_{\mathfrak{U}}$. Como los isomorfismos

$$\mathcal{L}(f) \otimes \mathcal{L}(f')|_{U_i} \xrightarrow{\varphi_i \cdot \varphi'_i} \mathcal{O}_{U_i}$$

verifican que $\varphi_j \cdot \varphi'_j = \varphi_{ij} \cdot \varphi'_{ij} \circ (\varphi_i \cdot \varphi'_i)$ resulta que $\mathcal{L}(f \cdot f') = \mathcal{L}(f) \otimes \mathcal{L}(f')$.

Fijemos un haz $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}_{\mathfrak{U}}(X)$ y sean

$$\mathcal{L}|_{U_i} \xrightarrow{\varphi_i} \mathcal{O}_X|_{U_i} := \mathcal{O}_{U_i}, \qquad \forall i \in I,$$

los isomorfismos de trivialización. Como

$$\mathcal{O}_{U_i}|_{U_i \cap U_j} \xrightarrow{\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}} \mathcal{O}_{U_j}|_{U_i \cap U_j}$$

es un automorfismo de $\mathcal{O}_{U_i \cap U_j}$, la identificación canónica $\mathrm{Aut}(\mathcal{O}_{U_i \cap U_j}) \approxeq \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{O}_X^*)$ determina elementos $f_{ij} \in \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{O}_X^*)$. Se define así $f_{\mathcal{L}} := (f_{ij})_{i,j \in I} \in C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_X^*)$. Resulta que $f_{\mathcal{L}}$ es un cociclo del complejo $C^{\cdot}(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_X^*)$, es decir,

$$f_{\mathcal{L}} \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_X^*) = \mathrm{Ker}(\delta^1 : C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_X^*) \longrightarrow C^2(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_X^*)).$$

En efecto, $(\delta^1 f_{\mathcal{L}})_{ijk} = f_{jk} \cdot f_{ik}^{-1} \cdot f_{ij} \in \Gamma(U_i \cap U_j \cap U_k, \mathcal{O}_X^*)$, elemento que se corresponde en $\mathrm{Aut}(\mathcal{O}_{U_i \cap U_j \cap U_k})$ con $\varphi_k \circ \varphi_j^{-1} \circ (\varphi_k \circ \varphi_i^{-1})^{-1} \circ \varphi_j \circ \varphi_i^{-1} =$

$(\varphi_k \circ \varphi_i^{-1})^{-1} \circ \varphi_k \circ \varphi_j^{-1} \circ \varphi_j \circ \varphi_i^{-1} = 1$. Se comprueba fácilmente que la aplicación definida

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Pic}_{\mathfrak{U}}(X) & \xrightarrow{\psi_{\mathfrak{U}}} & Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_X^*) \\ \mathcal{L} & \rightsquigarrow & f_{\mathcal{L}} \end{array}$$

es tal que $\phi_{\mathfrak{U}} \circ \psi_{\mathfrak{U}} = 1$ y, por tanto, $\phi_{\mathfrak{U}}$ es sobreyectiva.

Obviamente se tiene que $\operatorname{Im} \delta^0 \subset \operatorname{Ker} \phi_{\mathfrak{U}}$. Sea $f = (f_{ij})_{i,j \in I} \in \operatorname{Ker} \phi_{\mathfrak{U}}$, es decir, $\mathcal{L}(f) \approxeq \mathcal{O}_X$ (globalmente). Llamemos $\tau$ al isomorfismo

$$\mathcal{O}_X \xrightarrow{\approxeq} \mathcal{L}(f)$$

y $g_i := \tau(X)(1)|_{U_i} \in \Gamma(U_i, \mathcal{O}_X^*)$ los elementos que proceden de los isomorfismos $\tau|_{U_i}$ mediante el isomorfismo $\operatorname{Aut}(\mathcal{O}_{U_i}) \approxeq \Gamma(U_i, \mathcal{O}_X^*)$, $\forall i \in I$. Entonces, si $\varphi_{ij}$ son los isomorfismos que proceden de los elementos $f_{ij} \in \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{O}_X^*)$ mediante el isomorfismo $\operatorname{Aut}(\mathcal{O}_{U_i \cap U_j}) \approxeq \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{O}_X^*)$, por [**EGA I**, (3.3.2)] el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{U_i \cap U_j} & \xrightarrow{\tau|_{U_i}|_{U_i \cap U_j}} & \mathcal{O}_{U_i \cap U_j} \\ \Big\| & & \Big\downarrow {\scriptstyle \varphi_{ij}} \\ \mathcal{O}_{U_i \cap U_j} & \xrightarrow{\tau|_{U_j}|_{U_i \cap U_j}} & \mathcal{O}_{U_i \cap U_j}, \end{array}$$

que expresado en términos de las secciones globales del haz de unidades $\mathcal{O}_X^*$ resulta:

$$f_{ij} = g_j \cdot g_i^{-1} \text{ en } U_i \cap U_j.$$

Así, si $g = (g_i)_{i \in I} \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_X^*)$ se tiene que $\delta^0 g = f$. Con lo cual $\phi_{\mathfrak{U}}$ induce un isomorfismo

$$\check{H}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_X^*) \xrightarrow{\overline{\phi_{\mathfrak{U}}}} \operatorname{Pic}_{\mathfrak{U}}(X).$$

Además, considerando el monomorfismo $\operatorname{Pic}_{\mathfrak{U}}(X) \hookrightarrow \operatorname{Pic}(X)$ resulta

$$\check{H}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_X^*) \xrightarrow{\overline{\phi_{\mathfrak{U}}}} \operatorname{Pic}_{\mathfrak{U}}(X) \hookrightarrow \operatorname{Pic}(X).$$

Si $\mathfrak{V}$ es otro recubrimiento abierto de $X$ que refina a $\mathfrak{U}$, el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
\check{H}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_X^*) & \xrightarrow{\overline{\phi_{\mathfrak{U}}}} & \mathrm{Pic}_{\mathfrak{U}}(X) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\check{H}^1(\mathfrak{V}, \mathcal{O}_X^*) & \xrightarrow{\overline{\phi_{\mathfrak{V}}}} & \mathrm{Pic}_{\mathfrak{V}}(X)
\end{array}$$

es conmutativo. Y, como obviamente $\varinjlim_{\mathfrak{U}} \mathrm{Pic}_{\mathfrak{U}}(X) \approxeq \mathrm{Pic}(X)$, se tiene un isomorfismo

$$\check{H}^1(X, \mathcal{O}_X^*) \xrightarrow{\phi_X} \mathrm{Pic}(X).$$

□

## 1.5. Divisores de Cartier

Definición. Sea $(X, \mathcal{O}_X)$ un esquema. Un *divisor de Cartier* es una sección global del haz $\mathcal{K}_X^*/\mathcal{O}_X^*$. El conjunto de divisores de Cartier se denota por $\mathrm{Div}_{\mathrm{C}}(X)$.

Observación. Una forma cómoda de expresar un divisor de Cartier es la siguiente: consideremos la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X^* \longrightarrow \mathcal{K}_X^* \longrightarrow \mathcal{K}_X^*/\mathcal{O}_X^* \longrightarrow 0.$$

Un divisor de Cartier $D$ se puede describir mediante un recubrimiento de $X$, $\{U_i\}_{i\in I}$ y, para cada $i \in I$, secciones $f_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{K}_X^*)$, tales que para cada par $i, j \in I$, $f_i$ y $f_j$ se diferencian en una unidad, es decir, $\frac{f_i}{f_j} \in \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{O}_X^*)$. Los elementos $f_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{K}_X^*)$ se llaman *ecuaciones locales* del divisor $D$.

Hay que tener en cuenta que dos colecciones $\{(U_i, f_i)\}, \{(V_j, g_j)\}$ definirán el mismo divisor de Cartier si existe un recubrimiento por abiertos de $X$, $\{W_k\}_{k\in K}$, que refina a $\{U_i\}_{i\in I}$ y a $\{V_j\}_{j\in J}$ verificando que $\frac{f_i}{g_j} \in \Gamma(W_k, \mathcal{O}_X^*)$. Estamos diciendo que, localmente, $f_i$ y $g_j$ se diferencian en una unidad. Por tanto, las ecuaciones locales son únicas salvo unidades del haz estructural.

Definición. Llamamos *soporte* de un divisor $D$ al conjunto cerrado $\mathrm{Supp}(D) = \{x \in X \,/\, D_x \neq 1\}$. Es decir, el soporte de un divisor es precisamente el conjunto de puntos por los que pasa. Es correcto entonces escribir $x \in D$ cuando $x \in \operatorname{Supp}(D)$.

Otra forma de expresar el soporte de un divisor es

$$\operatorname{Supp}(D) = \{x \in X \,/\, 1 \text{ no es una ecuación local de } D \text{ en } x\}.$$

Observación. Sea $U$ un abierto de un esquema $X$. Si consideramos en $U$ la estructura de subesquema abierto de $X$, los divisores de Cartier de $U$ se pueden calcular de la siguiente forma:

$$\mathrm{Div}_{\mathrm{C}}(U) = \Gamma(U, \mathcal{K}_U^*/\mathcal{O}_U^*) \approxeq \Gamma(U, (\mathcal{K}_X^*/\mathcal{O}_X^*)|_U) \approxeq \Gamma(U, \mathcal{K}_X^*/\mathcal{O}_X^*).$$

Ejemplo. Sea $A$ un anillo local noetheriano y $X = \operatorname{Spec}(A)$. Si $A$ es un anillo de profundidad nula, $\mathrm{Div}_{\mathrm{C}}(X) = 0$. Y recíprocamente, decir que $\mathrm{Div}_{\mathrm{C}}(X) = 0$ implica que los no divisores de cero de $A$ coinciden con las unidades del anillo $A$. Dicho de otra forma $\mathfrak{m} \subset \{\text{divisores de cero de } A\}$. Así, $\mathfrak{m}$ es un primo asociado al cero y por tanto $A$ tiene profundidad nula.

1.5.1. Obsérvese que dos divisores siempre se pueden tomar sobre el mismo recubrimiento tomando un refinamiento adecuado de los dos recubrimientos de partida. De modo que $\mathrm{Div}_{\mathrm{C}}(X)$ es un grupo con la siguiente operación: dados $D_1 = \{(U_i, f_i)\}$ y $D_2 = \{(U_i, g_i)\}$ dos divisores, definimos su suma $D_1 + D_2$ como el divisor representado por $\{(U_i, f_i g_i)\}$.

Definición. Un divisor de Cartier es *principal* si está en la imagen del homomorfismo canónico

$$\mathrm{div}_C : \Gamma(X, \mathcal{K}_X^*) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{K}_X^*/\mathcal{O}_X^*).$$

Un divisor principal lo denotaremos por $\mathrm{div}_C(f)$ ó también por $\{(X, f)\}$ donde $f \in \Gamma(X, \mathcal{K}_X^*)$. Así, dos secciones globales $f, g$ del haz total de fracciones definen el mismo divisor principal si $\frac{f}{g} \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X^*)$.

Un divisor principal se puede representar también como un recubrimiento $\{U_i\}_{i \in I}$ y para cada $i \in I$ un elemento $f_i$ en la imagen del homomorfismo

$$\Gamma(U_i, \mathcal{K}_{U_i}^*) \longrightarrow \Gamma(U_i, \mathcal{K}_{U_i}^*/\mathcal{O}_{U_i}^*)$$

que cumplan la condición de recolección.

Por otra parte, un divisor de Cartier es localmente principal y para que sea principal la familia $\{(U_i, f_i)\}$ debe verificar la condición de recolección.

Definición. Dos divisores de Cartier son *linealmente equivalentes* si su diferencia es un divisor principal, es decir, $D_1 - D_2 = \mathrm{div}_C(f)$ y se denotará $D_1 \sim D_2$.

Esta relación es de equivalencia y, por tanto, tiene sentido definir el *grupo de clases de divisores de Cartier* que denotaremos por $\mathrm{ClCa}(X)$.

Proposición 1.5.2. *Si $X$ un esquema íntegro, separado, noetheriano y localmente factorial, el grupo de divisores de Weil,* $\mathrm{Div_W}(X)$*, es isomorfo al grupo de divisores de Cartier,* $\mathrm{Div_C}(X)$*. Además los divisores principales de Weil se corresponden con los divisores principales de Cartier y, por tanto, el grupo* $\mathrm{Cl}(X)$ *es isomorfo a* $\mathrm{ClCa}(X)$.

Demostración. Los anillos locales de un esquema de este tipo son dominios de factorización única, por tanto son dominios íntegramente cerrados, es decir, $X$ es un esquema normal, y por tanto tiene sentido hablar de divisores de Weil en $X$ (Hipótesis 1.3.1).

Por ser $X$ íntegro, $\mathcal{K}_X$ es el haz constante $\mathrm{Rat}(X)$. Consideremos un divisor de Cartier representado por $\{(U_i, f_i)\}$, donde cada $f_i$ es un elemento de $\mathrm{Rat}(X)^*$. Se obtiene un divisor de Weil de la siguiente forma: para cada $Y$ divisor primo, $\nu_Y(f_i)$ será el coeficiente de $Y$ donde $i$ es tal que $Y \cap U_i \neq \varnothing$. No existe ambigüedad en esta afirmación ya que si $Y \cap U_i \neq \varnothing$ sabemos que $\frac{f_i}{f_j} \in \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{O}_X^*)$ y entonces $\nu_Y(\frac{f_i}{f_j}) = 0$, es decir, $\nu_Y(f_i) = \nu_Y(f_j)$. Podemos definir así

$$D = \Sigma \nu_Y(f_i) Y.$$

Se tiene que $D$ es un divisor de Weil y está bien definido por lo considerado anteriormente y porque, al ser $X$ noetheriano, la suma es finita.

Recíprocamente, sea $D = \Sigma n_i Y_i$ y sea $p$ un punto de $X$. En primer lugar $D$ induce un divisor de Weil en $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,p})$: tomando la imagen inversa de un divisor primo $Y$ que pasa por $p$ a través del morfismo canónico

$$\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,p}) \longrightarrow X,$$

tendremos un cerrado íntegro de codimensión uno en $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,p})$, es decir, un divisor primo en $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,p})$. Extendiendo esta construcción por linealidad tenemos que $D$ induce un divisor de Weil $D_p$ en el esquema local $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,p})$. Aplicando la Proposición 1.3.7, como $\mathcal{O}_{X,p}$ es un dominio de factorización única por hipótesis, $D_p$ es un divisor de Weil principal en $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,p})$. Con lo cual existe un elemento $f_p$ en $\mathrm{Rat}(\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,p}))^* = \mathrm{Rat}(X)^*$ tal que

$$\mathrm{div}_W(f_p)|_{\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,p})} = D_p\,.$$

Por tanto $\mathrm{div}_W(f_p)$ y $D$ se diferencian sólo en divisores primos que no pasan por $p$. Entonces existe un entorno abierto $U_p$ de $X$ en el que $D$ y $\mathrm{div}_W(f_p)$ coinciden. Recubrimos $X$ por los abiertos $U_p$, y resulta que $\{(U_p, f_p)\}$ proporciona un divisor de Cartier de $X$. En efecto, si $U_p$ y $U_q$ son abiertos del recubrimiento con intersección no vacía,

$$D|_{U_p\cap U_q} = \mathrm{div}_W(f_p)|_{U_p\cap U_q} = \mathrm{div}_W(f_q)|_{U_p\cap U_q}\,.$$

Entonces $\Sigma\nu_Y(f_p)Y = \Sigma\nu_Y(f_q)Y$ de donde se deduce que $\nu_Y(f_p) = \nu_Y(f_q)$ y, entonces

$$\frac{f_p}{f_q} \in \Gamma(U_p \cap U_q, \mathcal{O}_X^*).$$

□

Corolario 1.5.3. *En los esquemas regulares noetherianos íntegros y separados los grupos de divisores y de clases de divisores de Cartier y de Weil son isomorfos. En particular en las variedades no singulares los grupos de divisores y de clases de divisores de Cartier y de Weil son isomorfos.*

Demostración. Es consecuencia de que los anillos locales regulares son dominios de factorización única ([**Ma2**, Theorem 20.3]). □

Definición. Un divisor de Cartier en un esquema $X$ se dice *efectivo* si puede ser representado por una familia $\{(U_i, f_i)\}$ donde $f_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{O}_{U_i})$ (obsérvese que $f_i$ ha de ser una unidad en $\Gamma(U_i, \mathcal{K}_X)$).

Dado un divisor de Cartier efectivo $\{(U_i, f_i)\}$ es posible definir un subesquema asociado de codimensión uno: sea $Y$ el subesquema cerrado definido por el haz de ideales $\mathfrak{I}$ tal que $\mathfrak{I}|_{U_i}(U_i) = f_i \cdot \mathcal{O}_{U_i}$. Recíprocamente, dado un subesquema cerrado localmente principal definimos un divisor de Cartier efectivo empleando los generadores de su ideal.

COROLARIO 1.5.4. *Sea $X$ un esquema íntegro, separado, noetheriano y localmente factorial. Los divisores de Cartier efectivos coinciden con los divisores de Weil efectivos.*

DEMOSTRACIÓN. Se deduce fácilmente a partir de las consideraciones anteriores y del hecho de que los subesquemas cerrados localmente principales son divisores de Weil efectivos. □

OBSERVACIÓN. En las hipótesis del corolario anterior el soporte de un divisor efectivo considerado como divisor de Weil coincide con el soporte del divisor considerado como un divisor de Cartier.

COROLARIO 1.5.5. *Sea $X$ un esquema íntegro, separado, noetheriano y localmente factorial. Entonces todo divisor de Cartier es diferencia de divisores efectivos. En particular en las variedades no singulares todo divisor de Cartier es diferencia de divisores efectivos.*

DEMOSTRACIÓN. Se deduce del hecho de que todo divisor de Weil es diferencia de divisores efectivos y del corolario anterior. □

Si $\varphi : X \longrightarrow X'$ es un morfismo de espacios anillados, en general no es cierto que el morfismo canónico $\varphi^\sharp : \mathcal{O}_{X'} \longrightarrow \varphi_*\mathcal{O}_X$ se extienda a un morfismo $\mathcal{K}_{X'} \longrightarrow \varphi_*\mathcal{K}_X$. En efecto, sea $X' = \operatorname{Spec}(A)$ con $A$ un dominio local que no es un cuerpo, $\mathfrak{m} \subset A$ su maximal y $K = A/\mathfrak{m}$ el cuerpo residual. Sea $X = \operatorname{Spec}(K)$ y $\varphi : X \longrightarrow X'$ el morfismo canónico. En este caso los elementos de $\mathfrak{m} \subset A$ no nulos (son no divisores de cero) se corresponden en $K$ con el cero.

Dado $\varphi : X \longrightarrow X'$ un morfismo de espacios anillados y dado $D \in \operatorname{Div}_{\mathrm{C}}(X')$ surge el problema de cuándo le corresponde un divisor de Cartier $\varphi^\natural(D) \in \mathrm{Div_C}(X)$. En lo que sigue daremos un criterio útil de restricción de divisores.

1.5.6. Para cada $U \subset X'$ abierto, denotamos por $S'_\varphi(U)$ al conjunto

$$\{s \in S'(U) \,/\, \Gamma(U, \varphi^\sharp)(s) \in S(\varphi^{-1}(U))\}$$

donde $\varphi^\sharp : \mathcal{O}_{X'} \longrightarrow \varphi_*\mathcal{O}_X$ es el morfismo canónico y $S'(U)$, $S(\varphi^{-1}(U))$ denotan el conjunto de elementos de $\Gamma(U, \mathcal{O}_{X'})$, $\Gamma(\varphi^{-1}(U), \mathcal{O}_X)$ que en las fibras son no divisores de cero, respectivamente. Se tiene así que $\Gamma(U, \varphi^\sharp)$ se factoriza a través de los subconjuntos multiplicativos

$$\begin{array}{ccc}
\Gamma(U, \mathcal{O}_{X'}) & \xrightarrow{\Gamma(U,\varphi^\sharp)} & \Gamma(\varphi^{-1}(U), \mathcal{O}_X) \\
\uparrow & & \| \\
S'(U) & & \Gamma(\varphi^{-1}(U), \mathcal{O}_X) \\
\uparrow & & \uparrow \\
S'_\varphi(U) & \longrightarrow & S(\varphi^{-1}(U)).
\end{array}$$

Definimos el haz $\mathcal{K}^\varphi_{X'}$ como el haz asociado al prehaz que a cada abierto $U \subset X'$ le asigna $S'_\varphi(U)^{-1}\Gamma(U, \mathcal{O}_{X'})$. Como este prehaz es un subprehaz de $\mathcal{K}^p_{X'}$, $\mathcal{K}^\varphi_{X'}$ es un subhaz de $\mathcal{K}_{X'}$. La cadena de subhaces de álgebras

$$\mathcal{O}_{X'} \longrightarrow \mathcal{K}^\varphi_{X'} \longrightarrow \mathcal{K}_{X'}$$

determina un subgrupo del grupo de divisores de Cartier de $X'$

$$\mathrm{Div_C}^\varphi(X') := \Gamma(X', \mathcal{K}^{\varphi *}_{X'}/\mathcal{O}^*_{X'}) \longrightarrow \mathrm{Div_C}(X') = \Gamma(X', \mathcal{K}^*_{X'}/\mathcal{O}^*_{X'}).$$

Por otra parte, el morfismo $\varphi^\sharp : \mathcal{O}_{X'} \longrightarrow \varphi_*\mathcal{O}_X$ se extiende a un homomorfismo de haces de anillos, $\varphi^\sharp : \mathcal{K}^\varphi_{X'} \longrightarrow \varphi_*\mathcal{K}_X$, que hace conmutativo el siguiente diagrama ([**B**, p. 77, Proposition 2]):

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{O}_{X'} & \longrightarrow & \mathcal{K}^\varphi_{X'} \\
{\scriptstyle\varphi^\sharp}\downarrow & & {\scriptstyle\varphi^\sharp}\downarrow \\
\varphi_*\mathcal{O}_X & \longrightarrow & \varphi_*\mathcal{K}_X
\end{array}$$

y, este proporciona el diagrama de haces de grupos abelianos

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{O}^*_{X'} & \longrightarrow & \mathcal{K}^{\varphi *}_{X'} & \longrightarrow & \mathcal{K}^{\varphi *}_{X'}/\mathcal{O}^*_{X'} \\ {\scriptstyle \varphi^\sharp}\big\downarrow & & {\scriptstyle \varphi^\sharp}\big\downarrow & & {\scriptstyle \varphi^\sharp}\big\downarrow \\ \varphi_*\mathcal{O}^*_X & \longrightarrow & \varphi_*\mathcal{K}^*_X & \longrightarrow & \varphi_*(\mathcal{K}^*_X/\mathcal{O}^*_X). \end{array}$$

Tomando secciones globales, $\varphi^\sharp$ induce un homomorfismo de grupos abelianos

$$\varphi^\natural := \Gamma(X', \varphi^\sharp) : \mathrm{Div_C}^\varphi(X') \longrightarrow \mathrm{Div_C}(X).$$

Nos referiremos a la imagen de un divisor $D \in \mathrm{Div_C}^\varphi(X') \subset \mathrm{Div_C}(X')$ a través de este homomorfismo como la *imagen recíproca de $D$ por $\varphi$* y se denotará $\varphi^\natural(D)$.

1.5.7. Dado $\varphi : X \longrightarrow X'$ un morfismo de espacios anillados, si $\mathcal{K}_{X'} = \mathcal{K}^\varphi_{X'}$ se tiene un homomorfismo de grupos

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Div_C}(X') & \xrightarrow{\varphi^\natural} & \mathrm{Div_C}(X) \\ D & \rightsquigarrow & \varphi^\natural(D) \end{array}$$

que induce un homomorfismo $\mathrm{ClCa}(X') \longrightarrow \mathrm{ClCa}(X)$ de modo que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Div_C}(X') & \longrightarrow & \mathrm{ClCa}(X') \\ {\scriptstyle \varphi^\natural}\big\downarrow & & \big\downarrow \\ \mathrm{Div_C}(X) & \longrightarrow & \mathrm{ClCa}(X). \end{array}$$

PROPOSICIÓN 1.5.8. *Sea $\varphi : X \longrightarrow X'$ un morfismo de espacios anillados. Las dos condiciones siguientes garantizan que la imagen inversa de $D$ por $\varphi$ está definida para todo $D \in \mathrm{Div_C}(X')$:*

(1) *$\varphi$ es plano.*

(2) *$X$ y $X'$ son dos esquemas localmente noetherianos, $X$ es reducido y toda componente irreducible de $X$ domina a una componente irreducible de $X'$.*

DEMOSTRACIÓN. En ambos casos habrá que probar que $\mathcal{K}_{X'} = \mathcal{K}^\varphi_{X'}$. Podemos reducirnos al caso afín $X = \mathrm{Spec}(A)$, $X' = \mathrm{Spec}(A')$ donde $A, A'$ son anillos noetherianos y $\varphi$ corresponde a un homomorfismo de anillos $A' \longrightarrow A$. Bastará probar que $S'_\varphi(X') = \{\text{no divisores de cero de } A'\}$.

(1) En este caso $A'$ es un $A$-módulo plano y, por tanto, todo elemento de $A$ no divisor de cero en $A$ es no divisor de cero en $A'$.

(2) Sea $s'$ es un no divisor de cero de $A'$. Entonces $s'$ no pertenece a ningún ideal primo minimal de $A'$ y, por tanto, su imagen $s \in A$ tampoco está en ningún ideal primo minimal de $A$. Resulta que $s$ es un no divisor de cero en $A$ ya que $A$ es reducido.

$\square$

Observación. Existen morfismos para los que en general no se puede definir la imagen inversa de un divisor de Cartier arbitrario. Sin embargo, para determinados divisores, por ejemplo, los representados por secciones de $\mathcal{K}_{X'}^{\varphi}$, sí está definida su imagen inversa.

CAPÍTULO 2

# Divisores y haces inversibles en esquemas proyectivos

## 2.1. Haz inversible asociado a un divisor

Definición. Sea $D$ un divisor de Cartier en un esquema $X$ representado por $\{(U_i, f_i)\}$. Definimos el subhaz $\mathcal{O}_X(D)$ del haz total de fracciones $\mathcal{K}_X$ como el submódulo de $\mathcal{K}_X$ generado por $\{f_i^{-1}\}$ en $\{U_i\}$.

Veamos que está bien definido. En efecto, estos subhaces y su inclusión en $\mathcal{K}_X$ recolectan, ya que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X(D)|_{U_i \cap U_j} & \xrightarrow{\approxeq} & \mathcal{O}_X(D)|_{U_j \cap U_i} \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ \mathcal{K}_X & = & \mathcal{K}_X \end{array}$$

donde el morfismo superior es el isomorfismo que viene dado por el elemento $\frac{f_i}{f_j} \in \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{O}_X^*)$ es claramente conmutativo.

A $\mathcal{O}_X(D)$ le llamamos *el haz asociado a $D$*.

Proposición 2.1.1. *Sea $(X, \mathcal{O}_X)$ un esquema. Entonces:*

(1) *Para cualquier divisor $D$ en $X$, $\mathcal{O}_X(D)$ es un haz inversible en $X$. La aplicación $D \longrightarrow \mathcal{O}_X(D)$ proporciona una correspondencia biunívoca entre divisores de Cartier de $X$ y subhaces inversibles de $\mathcal{K}_X$ (*ideales fraccionarios inversibles*) .*

(2) *Se tienen los siguientes isomorfismos*

$$\mathcal{O}_X(D_1 + D_2) \approxeq \mathcal{O}_X(D_1) \otimes \mathcal{O}_X(D_2)$$
$$\mathcal{O}_X(-D) \approxeq \mathcal{O}_X(D)^{-1},$$

*donde $D_1$, $D_2$, $D \in \mathrm{Div_C}(X)$.*

(3) *Los divisores $D$ y $D'$ son linealmente equivalentes si, y sólo si,*

$$\mathcal{O}_X(D) \approxeq \mathcal{O}_X(D')$$

*como haces abstractos, es decir, sin tener en cuenta su embebimiento en $\mathcal{K}_X$.*

Demostración.

1. Para ver que es un haz inversible basta tomar como abiertos de trivialidad los $U_i$ y se tiene que

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X|_{U_i} & \xrightarrow{\approxeq} & \mathcal{O}_X(D)|_{U_i} \\ 1 & \rightsquigarrow & f_i^{-1}. \end{array}$$

Recíprocamente, dado $\mathcal{L}$ un subhaz inversible de $\mathcal{K}_X$ sea, para cada $i$, $U_i$ un abierto de trivialidad y $f_i$ la sección que nos proporciona el isomorfismo con el haz estructural. Resulta que $\{(U_i, f_i^{-1})\}$ representa a un divisor de Cartier. En efecto, $f_i$ es un no divisor de cero en todas las fibras (ya que es la imagen del 1 por un isomorfismo) y, por tanto, $f_i^{-1}$ está en $\Gamma(U_i, \mathcal{K}_X^*)$. Además $f_i^{-1}\mathcal{O}_{U_i\cap U_j} \approxeq f_j^{-1}\mathcal{O}_{U_i\cap U_j}$ de donde se deduce que $\frac{f_i^{-1}}{f_j^{-1}} \in \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{O}_X^*)$.

2. Dados $D_1 = \{(U_i, f_i)\}$ y $D_2 = \{(U_i, g_i)\}$ divisores de Cartier $D_1 + D_2$ viene representado por $\{(U_i, f_i g_i)\}$. El haz asociado a $D_1 + D_2$ vendrá dado en un abierto de trivialidad por $f_i^{-1} g_i^{-1}$ y entonces se tiene que

$$\mathcal{O}_X(D_1 + D_2) \approxeq \mathcal{O}_X(D_1) \otimes \mathcal{O}_X(D_2).$$

Se deduce análogamente que $\mathcal{O}_X(-D) \approxeq \mathcal{O}_X(D)^{-1}$.

3. Por el apartado anterior, será suficiente ver que un divisor es principal si, y sólo si, su haz asociado es isomorfo al haz estructural. Tomemos $D$ un divisor principal que viene representado por $\{(X, f)\}$. Entonces $\mathcal{O}_X(D)$ está globalmente generado por $f^{-1}$ y tenemos un isomorfismo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X & \xrightarrow{\approxeq} & \mathcal{O}_X(D) \\ 1 & \rightsquigarrow & f^{-1}. \end{array}$$

Por otra parte, dado el isomorfismo, sea $f$ la imagen del 1. Entonces $\{(X, f^{-1})\} = D$ es un divisor principal.

$\square$

Ejemplo. Sea $X = \mathbb{P}_k^n = \cup_{i=0}^n D_+(X_i)$. Sea el divisor de Cartier $\{(D_+(X_i), \frac{X_0}{X_i})\}$ (de hecho, es un divisor de Cartier efectivo). Resulta que el haz inversible asociado viene dado por:

$$\mathcal{O}_X(D)|_{D_+(X_i)} = \frac{X_i}{X_0}\mathcal{O}_{D_+(X_i)}, \qquad \forall i = 0, \ldots, n.$$

(Este haz inversible se denota frecuentemente $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(1)$).

Corolario 2.1.2. *Dado $(X, \mathcal{O}_X)$ un esquema la aplicación*

$$D \rightsquigarrow \mathcal{O}_X(D)$$

*define un homomorfismo inyectivo entre los grupos* $\mathrm{ClCa}(X)$ *y* $\mathrm{Pic}(X)$.

2.1.3. Sea $\varphi : X \longrightarrow X'$ un morfismo de espacios anillados con $\mathcal{K}_{X'} = \mathcal{K}_{X'}^{\varphi}$ (véase 1.5.7). Entonces los homomorfismos $\mathrm{Pic}(X') \xrightarrow{\varphi^*} \mathrm{Pic}(X)$, $\mathrm{ClCa}(X') \longrightarrow \mathrm{ClCa}(X)$ son compatibles. Es decir, el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{ClCa}(X') & \longrightarrow & \mathrm{Pic}(X') \\ \big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \varphi^*} \\ \mathrm{ClCa}(X) & \longrightarrow & \mathrm{Pic}(X) \end{array}$$

es conmutativo.

Proposición 2.1.4. *Sea $(X, \mathcal{O}_X)$ un esquema, $D = \{(U_i, f_i)\}$ un divisor de Cartier efectivo e $Y$ su esquema asociado localmente principal. Se tiene que:*

$$\mathfrak{I} \approxeq \mathcal{O}_X(-D)$$

*donde $\mathfrak{I}$ es el haz de ideales que define a $Y$.*

Demostración. Resulta que $\mathcal{O}_X(-D)$ es un ideal fraccionario inversible generado localmente por las secciones $f_i$. Además, como $D$ es un divisor efectivo, $f_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{O}_{U_i})$ y por tanto $\mathcal{O}_X(-D)$ es un subhaz de $\mathcal{O}_X$ que en los abiertos del recubrimiento $\{U_i\}$ coincide con $\mathfrak{I}$, entonces son isomorfos. □

Observación. La aplicación $\mathrm{ClCa}(X) \longrightarrow \mathrm{Pic}(X)$ en general no tiene por qué ser una aplicación sobreyectiva como veremos en el último capítulo mediante un contraejemplo debido a Kleiman. El problema de cuándo es un isomorfismo es importante. Abordaremos la cuestión para esquemas proyectivos noetherianos pero previamente expondremos un caso donde la respuesta es afirmativa y la demostración es sencilla.

PROPOSICIÓN 2.1.5. *Sea* $(X, \mathcal{O}_X)$ *un esquema íntegro. Entonces el homomorfismo*

$$\mathrm{ClCa}(X) \longrightarrow \mathrm{Pic}(X)$$

*es un isomorfismo.*

DEMOSTRACIÓN. Por la Proposición 2.1.1 es suficiente demostrar que todo haz inversible es isomorfo a un subhaz del haz total de fracciones $\mathcal{K}_X$.

Como $X$ es íntegro el haz total de fracciones $\mathcal{K} := \mathcal{K}_X$ es el haz constante $\mathrm{Rat}(X)$. Sea $\mathcal{L}$ un haz inversible y $U$ un abierto de trivialidad de $\mathcal{L}$. Los isomorfismos canónicos

$$\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{K}|_U \approxeq \mathcal{L}|_U \otimes_{\mathcal{O}_X|_U} \mathcal{K}|_U \approxeq \mathcal{O}_X|_U \otimes_{\mathcal{O}_X|_U} \mathcal{K}|_U \approxeq \mathcal{K}|_U$$

demuestran que $\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{K}|_U$ es el haz constante $\mathrm{Rat}(X)$ en cada abierto de trivialidad $U$ de $\mathcal{L}$. Como $X$ es irreducible, un haz que es constante en cada abierto de un recubrimiento es constante en $X$ (ya que la intersección de dos abiertos no vacíos cualesquiera de $X$ siempre es no vacía). De ahí que $\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{K}$ y $\mathcal{K}$ sean $\mathcal{O}_X$-módulos isomorfos. El homomorfismo canónico

$$\mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{K}$$

proporciona un homomorfismo inyectivo de haces de $\mathcal{O}_X$-módulos

$$\mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{K} \approxeq \mathcal{K},$$

ya que $\mathcal{L}$ es un $\mathcal{O}_X$-módulo plano. Así el haz inversible $\mathcal{L}$ es isomorfo a un subhaz de $\mathcal{K}$. □

## 2.2. Anillos de coordenadas no irrelevantes

A continuación se establecen los preliminares necesarios para la obtención del análogo del resultado anterior en el caso de esquemas proyectivos sobre un anillo noetheriano.

Sea $A$ un anillo noetheriano. Si $S$ es un anillo graduado que es un anillo de coordenadas homogéneas asociado a un $A$-esquema proyectivo $X$, entonces

$$S = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} S_i$$

y $S_0 = A$; además $S$ está generado como $A$-álgebra por un número finito de elementos homogéneos del ideal irrelevante $S_+ = \oplus_{i>0} S_i$. En lo sucesivo, cuando hagamos referencia a un anillo graduado, $S$ denotará un anillo graduado noetheriano de este tipo y $\mathrm{Proj}(S)$ denotará el esquema proyectivo determinado por $S$.

Definición. Un anillo graduado $S$ se dirá *irrelevante* si cualquier elemento del ideal irrelevante $S_+ = \oplus_{i>0} S_i$ es un divisor de cero de $S$.

Demostraremos que un esquema proyectivo siempre admite un anillo de coordenadas homogéneas no irrelevante (Proposición 2.2.2, Corolario 2.2.3).

Proposición 2.2.1. *Sea $S$ un anillo graduado, $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_n$ ideales primos de $S$, y $\mathfrak{J}$ un ideal homogéneo de $S$. Si los elementos homogéneos de $\mathfrak{J}$ están contenidos en $\mathfrak{p}_1 \cup \mathfrak{p}_2 \cup \ldots \cup \mathfrak{p}_n$, entonces $\mathfrak{J}$ está contenido en $\mathfrak{p}_j$ para algún $j \in \{1, \ldots, n\}$.*

Demostración. ([**E**, Lemma 3.3]) La demostración se hará por inducción en el número de primos del conjunto $\{\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_n\}$. El caso $n = 1$ es trivial. Si $n > 1$, por hipótesis de inducción es suficiente estudiar el caso en que $\mathfrak{J}$ no está contenido en la unión de $n-1$ primos del conjunto $\{\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_n\}$. En este caso es posible encontrar elementos homogéneos $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathfrak{J}$ de forma que

$$x_i \notin \bigcup_{j \neq i} \mathfrak{p}_j, \qquad \forall i \in \{1, \ldots, n\}$$

(obviamente cada $x_i$ estará en el correspondiente $\mathfrak{p}_i$). Sea $r$ el mínimo común múltiplo de los grados de los elementos $x_1$ y $x_2 \cdots x_n$. Sean $d_1 = \frac{r}{r_1}$ y $d_2 = \frac{r}{r_2}$, donde $r_1$ y $r_2$ son los grados de los elementos $x_1$ y $x_2 \cdots x_n$, respectivamente. Así, $y_1 := x_1^{d_1}$ e $y_2 := (x_2 \cdots x_n)^{d_2}$ son elementos homogéneos de $\mathfrak{J}$ que tienen el mismo grado. Ahora bien,

$y_1 + y_2 \in \mathfrak{J}$ es un elemento homogéneo que no está en $\mathfrak{p}_1 \cup \mathfrak{p}_2 \cup \ldots \cup \mathfrak{p}_n$, lo cual es una contradicción. $\square$

Proposición 2.2.2. *Consideremos $X$ un esquema proyectivo sobre un anillo noetheriano $A$. Entonces es posible encontrar un anillo de coordenadas homogéneas para $X$ que sea no irrelevante.*

Demostración. Supongamos que $X = \mathrm{Proj}(S)$ donde

$$S = A[x_0, \ldots, x_r]$$

es una $A$-álgebra graduada con $S_0 = A$ y $x_0, \ldots, x_r$ elementos homogéneos de $S$. Consideremos $S' = S/\mathfrak{J}$ donde $\mathfrak{J}$ es el ideal homogéneo

$$\begin{aligned} \mathfrak{J} &= \{s \in S \,/\, \exists n \in \mathbb{N} \text{ tal que } s \cdot S_+^n = 0\} \\ &= \{s \in S \,/\, \forall\, i \in \{0, \ldots, r\},\ \exists n \in \mathbb{N} \text{ tal que } s \cdot x_i^n = 0\}. \end{aligned}$$

Veamos que $X \approxeq \mathrm{Proj}(S')$. Para ello probaremos que el encaje cerrado de $A$-esquemas proyectivos

$$\mathrm{Proj}(S') \xrightarrow{\mathbf{i}} \mathrm{Proj}(S),$$

inducido por el homomorfismo canónico de anillos graduados

$$S \longrightarrow S' = S/\mathfrak{J},$$

es un isomorfismo. En primer lugar $\mathbf{i}$ es una aplicación biyectiva de espacios topológicos. En efecto, sea $\mathfrak{p} \in \mathrm{Proj}(S)$ y $s \in \mathfrak{J}$. Entonces existe un natural $n$ tal que $sx_i^n = 0$, para cualquier $i = 0, \ldots, r$. Por ser $\mathfrak{p}$ un ideal primo y $S_+ \not\subseteq \mathfrak{p}$ se deduce que $s \in \mathfrak{p}$. Hemos probado que $\mathfrak{J} \subset \mathfrak{p}$ y por tanto $\mathrm{Proj}(S')$ y $\mathrm{Proj}(S)$ poseen el mismo espacio topológico subyacente.

Para ver que el encaje cerrado que identifica los espacios topológicos subyacentes

$$\mathrm{Proj}(S') \xrightarrow{\mathbf{i}} \mathrm{Proj}(S)$$

es un isomorfismo de $A$-esquemas es suficiente demostrar que $\mathfrak{J}_{(\mathfrak{p})} = 0$, para cualquier $\mathfrak{p} \in \mathrm{Proj}(S)$. Sea $\frac{a}{b} \in \mathfrak{J}_{\mathfrak{p}}$, con $a \in \mathfrak{J}$ y $b \notin \mathfrak{p}$ elementos homogéneos de $S$ del mismo grado. Sea $n$ un natural tal que $a \cdot x_i^n = 0$, para cualquier $i \in \{0, \ldots, r\}$. Como $S_+ \not\subseteq \mathfrak{p}$, para algún $i$, $x_i \notin \mathfrak{p}$, con lo cual $\frac{a}{b} = \frac{ax_i^n}{bx_i^n} = 0$ en $\mathfrak{J}_\mathfrak{p}$. Esto implica que $S'_{(\mathfrak{p}')} \approxeq S_{(\mathfrak{p})}$ donde $\mathfrak{p}' = \mathfrak{p}/\mathfrak{J}$. Se tiene entonces que $\mathrm{Proj}(S') = \mathrm{Proj}(S) = X$.

Por tanto $S'$ es un anillo de coordenadas homogéneas para el esquema proyectivo $X$. Veamos que es irrelevante. En efecto, al ser $S'$ un anillo graduado todo ideal primo asociado $\mathfrak{p}' \subset S'$ es homogéneo y es el aniquilador $\mathfrak{p}' = ann(\bar{a})$ de un elemento homogéneo $\bar{a} \in S'$ ([**E**, Proposition 3.12]). Teniendo en cuenta que

$$\{\bar{s} \in S' \,/\, \forall\, i \in \{0, \dots, r\},\ \exists n \in \mathbb{N} \text{ tal que } \bar{s}\bar{x}_i^n = 0\} = 0$$

necesariamente $S'_+ \nsubseteq \mathfrak{p}'$ para cualquier primo asociado $\mathfrak{p}'$ de $S'$. Como consecuencia de la Proposición 2.2.1, $S'_+$ no está contenido en la unión de los primos asociados y, por tanto, existirá al menos un elemento homogéneo en $S'_+$ que es no divisor de cero.

□

Corolario 2.2.3. *Sea $X$ un esquema proyectivo sobre un anillo noetheriano $A$. Entonces es posible encontrar un anillo de coordenadas homogéneas de $X$ con un no divisor de cero homogéneo de grado uno.*

Demostración. Por la Proposición 2.2.2, existe $S$ un anillo de coordenadas homogéneas no irrelevante para el esquema proyectivo $X$. Eligiendo $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande y $T := S^{(n)}$ resulta que

$$T = A[t_0, \dots, t_r]$$

es un anillo graduado noetheriano generado como $A$-álgebra por elementos homogéneos $t_0, \dots, t_r \in T_1$. El anillo $T$, que es un anillo de coordenadas homogéneas para el esquema proyectivo $X$ (véase [**EGA II**, Proposition (2.4.7)]), es no irrelevante ya que

$$\{s \in T \,/\, \forall\, i \in \{0, \dots, r\},\ \exists n \in \mathbb{N} \text{ tal que } st_i^n = 0\} = 0.$$

Como $T_+$ no está contenido en la unión de primos asociados, alguno de los elementos $t_0, \dots, t_r \in T_1$ será no divisor de cero en $T$. □

Observación. Sea $X$ un esquema proyectivo con anillo de coordenadas homogéneas no irrelevante $S$. Sea $f \in S_+$ un elemento homogéneo no divisor de cero. Como la unión de primos asociados al cero son los divisores de cero de $S$, $f$ no está contenido en ninguno de los primos asociados al cero de $S$. Entonces, $D_+(f)$ es un abierto afín esquemáticamente denso de $X$. Además cualquier abierto principal de $X$ esquemáticamente denso es de este tipo. Como consecuencia del Corolario 2.2.3, siempre es posible encontrar un anillo de coordenadas homogéneas no irrelevante $S$ para $X$ y un elemento homogéneo de grado uno, $f$, tal que $D_+(f)$ es un abierto afín esquemáticamente denso.

## 2.3. Divisores de Cartier en esquemas proyectivos

Demostraremos en este apartado que el morfismo $\mathrm{ClCa}(X) \longrightarrow \mathrm{Pic}(X)$ es un isomorfismo si $X$ es un esquema proyectivo.

PROPOSICIÓN 2.3.1. *Sea $U$ un conjunto esquemáticamente denso de la forma $D_+(f)$ donde $f$ es un elemento homogéneo de grado* 1 *no divisor de cero. Entonces el homomorfismo canónico de restricción*

$$\Gamma(D_+(g), \mathcal{K}_X) \longrightarrow \Gamma(D_+(f) \cap D_+(g), \mathcal{K}_X)$$

*es un isomorfismo, siendo $g \in S_+$ cualquier elemento homogéneo.*

DEMOSTRACIÓN. Teniendo en cuenta la identificación canónica

$$\Gamma(D_+(h), \mathcal{K}_X) = \mathrm{QTot}(S_{(h)}),$$

para cada elemento homogéneo $h \in S_+$, el morfismo de restricción se corresponde con el homomorfismo canónico

$$\Gamma(D_+(g), \mathcal{K}_X) = \mathrm{QTot}(S_{(g)}) \longrightarrow \Gamma(D_+(fg), \mathcal{K}_X) = \mathrm{QTot}(S_{(fg)}).$$

Por [**EGA II**, Lemme (2.2.2)] se tiene la identificación $S_{(fg)} \approxeq {S_{(g)}}_{\frac{f^d}{g}}$, siendo $d$ el grado del elemento $g$. Por otra parte, $\frac{f^d}{g}$ es un no divisor de cero en $S_{(g)}$ y del Corolario 1.2.5 se deduce que el homomorfismo canónico

$$\mathrm{QTot}(S_{(g)}) \longrightarrow \mathrm{QTot}(S_{(fg)})$$

es un isomorfismo. □

Lema 2.3.2. *Sea $A$ un anillo noetheriano, $M$ un $A$-módulo, y*

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_n \in \operatorname{Spec}(A)$$

*ideales primos sin relaciones de contenido entre ellos tal que $M \otimes A_{\mathfrak{p}_i}$ es un $A_{\mathfrak{p}_i}$-módulo libre de rango 1, $\forall i = 1, \ldots, n$. Entonces, existe un elemento $f \in M$ tal que $f \otimes 1$ es una base de $M \otimes A_{\mathfrak{p}_i}$ como $A_{\mathfrak{p}_i}$-módulo libre, $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$.*

Demostración. Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, sea $f_i \in M$ tal que $f_i \otimes 1$ es una base de $M \otimes A_{\mathfrak{p}_i}$ como $A_{\mathfrak{p}_i}$-módulo. Fijemos un índice $i \in \{1, \ldots, n\}$. Como los ideales $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_n$ no tienen relaciones de contenido entre ellos, es posible elegir dicha base de modo que $f_i \in \mathfrak{p}_j M$, $\forall j \neq i$. En efecto, para cada $k \neq i$ existen elementos $x_k \in \mathfrak{p}_k$ y $x_k \notin \mathfrak{p}_i$; resulta que $\prod\limits_{k \neq i} x_k f_i \in \mathfrak{p}_j M$, $\forall j \neq i$. Se comprueba fácilmente que $\prod\limits_{k \neq i} x_k f_i$ es una base de $M \otimes A_{\mathfrak{p}_i}$ como $A_{\mathfrak{p}_i}$-módulo.

Para $f := f_1 + f_2 + \cdots + f_n \in M$ se verifica la siguiente igualdad:

$$M \otimes A_{\mathfrak{p}_i} = A_{\mathfrak{p}_i}(f \otimes 1) + \mathfrak{p}_i A_{\mathfrak{p}_i}(M \otimes A_{\mathfrak{p}_i}) \qquad (\forall i \in \{1, \ldots, n\}).$$

Aplicando el lema de Nakayama se deduce que

$$M \otimes A_{\mathfrak{p}_i} = A_{\mathfrak{p}_i}(f \otimes 1).$$

Veamos que $f \otimes 1$ es una base de $M \otimes A_{\mathfrak{p}_i}$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. En efecto, sea $k(\mathfrak{p}_i) = A_{\mathfrak{p}_i}/\mathfrak{p}_i A_{\mathfrak{p}_i}$ el cuerpo residual como $M \otimes A_{\mathfrak{p}_i}$ es un $A_{\mathfrak{p}_i}$-módulo plano, aplicando el funtor $- \otimes k(\mathfrak{p}_i) = - \otimes_A k(\mathfrak{p}_i)$ a la sucesión exacta

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \operatorname{Ker}\phi & \longrightarrow & A_{\mathfrak{p}_i} & \xrightarrow{\phi} & M \otimes A_{\mathfrak{p}_i} & \longrightarrow & 0 \\ & & & & 1 & \rightsquigarrow & f \otimes 1 & & \end{array}$$

se obtiene la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker}\phi \otimes k(\mathfrak{p}_i) \longrightarrow k(\mathfrak{p}_i) \xrightarrow{\phi \otimes 1} k(\mathfrak{p}_i) \longrightarrow 0,$$

donde $\phi \otimes 1$ es un isomorfismo de espacios vectoriales. Con lo cual $\operatorname{Ker}\phi \otimes k(\mathfrak{p}_i) = 0$ y, como $\operatorname{Ker}\phi$ es un $A_{\mathfrak{p}_i}$-módulo finitamente generado, se deduce que $\operatorname{Ker}\phi = 0$. Entonces $\phi$ es un isomorfismo y $(f \otimes 1)$ es una base de $M \otimes_A A_{\mathfrak{p}_i}$. $\square$

Proposición 2.3.3. *Bajo las hipótesis y con la notación del lema anterior, si además el $A$-módulo $M$ es finitamente generado, entonces existe un abierto principal $U$ de $X = \operatorname{Spec}(A)$ tal que $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n \in U$ y el $\mathcal{O}_X$-módulo cuasi-coherente $\mathcal{M} = \widetilde{M}$ es tal que $\mathcal{M}|_U$ es un $\mathcal{O}_U$-módulo libre de rango uno.*

Demostración. Supongamos que $M$ está generado como $A$-módulo por elementos $g_1, \ldots, g_t$. Por el lema anterior para cada $i = 1, \ldots, t$ y para cada $j = 1, \ldots, n$ existen $s_{ji} \notin \mathfrak{p}_j$ tal que $s_{ji} g_i = a_{ji} f$ para algún $a_{ji} \in A$. Sea $\mathfrak{a}_i = \{s \in A \,/\, s g_i \in Af\}$, para cada $i \in \{1, \ldots, t\}$. Cada ideal $\mathfrak{a}_i \subset A$ no está contenido en $\mathfrak{p}_j$, $\forall j = 1, \ldots, n$. Entonces existe $s_i \in \mathfrak{a}_i$ tal que $s_i \notin \mathfrak{p}_j$ para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$ e $i \in \{1, \ldots, t\}$. Sea $s = s_1 \cdots s_t$. Este elemento no está en $\mathfrak{p}_j$, cualquiera que sea $j \in \{1, \ldots, n\}$ y $s \in \mathfrak{a}_i$, para todo $i \in \{1, \ldots, t\}$. El abierto $D(s)$ es un entorno de $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_n$. Veamos que $(f \otimes 1) \in M_{\mathfrak{p}} = M \otimes A_{\mathfrak{p}}$ es un generador de $M_{\mathfrak{p}}$ como $A_{\mathfrak{p}}$-módulo, cualquiera que sea el primo $\mathfrak{p} \in D(s)$. En primer lugar veamos que $f \otimes 1$ es un generador de $M_{\mathfrak{p}}$. Para cada elemento $m \otimes \frac{a}{b}$ de $M_{\mathfrak{p}}$ (con $m \in M$, $a \in A$ y $b \in A - \mathfrak{p}$) existe una expresión con coeficientes $a_1, \ldots, a_t \in A$

$$\begin{aligned} m \otimes \frac{a}{b} &= (a_1 g_1 + a_2 g_2 + \cdots + a_t g_t) \otimes \frac{a}{b} \\ &= \frac{a_1}{s}(s g_1 \otimes \frac{a}{b}) + \frac{a_2}{s}(s g_2 \otimes \frac{a}{b}) + \cdots + \frac{a_t}{s}(s g_t \otimes \frac{a}{b}). \end{aligned}$$

Como $s g_i = a'_i f$ con $a'_i \in A$, se tiene que $m \otimes \frac{a}{b} \in A_{\mathfrak{p}}(f \otimes 1)$.

Veamos ahora que es posible encontrar un abierto principal $U \subset D(s)$ tal que $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n \in U$ y de modo que $\mathcal{M}|_U$ es libre. Para ello podemos suponer que $A = A_s$, $M = M_s$. Consideremos la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \mathfrak{a} \longrightarrow A \xrightarrow{\phi} M \longrightarrow 0 \tag{5}$$

donde $\phi$ es el homomorfismo de $A$-módulos determinado por el elemento $f \in M$. Por el lema anterior se tiene que $f \otimes 1$ es una base de $M \otimes A_{\mathfrak{p}_i}$, $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$. Entonces $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}_i} = 0$, $\forall i = 1, \ldots, n$, es decir, $(0 : \mathfrak{a}) \subsetneq \mathfrak{p}_1 \cup \ldots \cup \mathfrak{p}_n$ y, por tanto, existe un elemento $t \in (0 : \mathfrak{a})$ tal que $t \notin \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_n$. El abierto $U = D(t)$ es un entorno de $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_n$

y la sucesión (5) induce un isomorfismo

$$A_t \xrightarrow{\approxeq} M_t$$

de modo que $\mathcal{M}|_U$ es un $\mathcal{O}_U$-módulo libre de rango uno. □

Teorema 2.3.4. *Sea $X$ un esquema proyectivo sobre un anillo noetheriano $A$. Entonces el morfismo*

$$\mathrm{Div}_{\mathrm{C}}(X) \longrightarrow \mathrm{Pic}(X)$$

*es sobreyectivo.*

Demostración. Por ser $X$ un esquema proyectivo es posible encontrar $S$ un anillo de coordenadas homogéneas de $X$ tal que $S$ es no irrelevante. Incluso podemos suponer que existe un elemento homogéneo $y \in S_+$ de grado uno que es no divisor de cero en $S$.

Por otra parte, sean $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_n$ los ideales maximales entre los ideales del conjunto $\mathrm{Ass}(S)$. En particular no existen relaciones de contenido entre los primos homogéneos $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_n$. Si $p_1, \ldots, p_n \in \mathrm{Ass}(X)$ son los puntos correspondientes de $X$, y $U \subset X$ es un abierto tal que $p_1, \ldots, p_n \in U$ entonces $\mathrm{Ass}(X) \subset U$.

Sea $\mathcal{L}$ un haz inversible en $X$. El haz $\mathcal{L}$ es coherente y por tanto $\mathcal{L}|_{D_+(y)}$ es también un haz coherente. Si $M = \Gamma(D_+(y), \mathcal{L})$, entonces $\mathcal{L}|_{D_+(y)} \approxeq \widetilde{M}$. Además $M$ es finitamente generado como módulo sobre el anillo $\Gamma(D_+(y), \mathcal{O}_X) = S_{(y)}$.

La proposición anterior garantiza la existencia de un abierto principal $U_1 \subset D_+(y)$ que contiene a todos los primos asociados de $X$ y que existe un elemento $f_1 \in M$ tal que

$$\mathcal{L}_p = M \otimes \mathcal{O}_{X,p} = \mathcal{O}_{X,p}(f_1 \otimes 1) \qquad (\forall p \in U_1).$$

Sea $s \in S$ un elemento homogéneo tal que $U_1 = D_+(s)$. Como el abierto $U_1 \subset X$ es esquemáticamente denso, necesariamente $s$ ha de ser un no divisor de cero de $S$. Sea

$$\mathcal{L}|_{U_1} \xrightarrow{\approxeq} \mathcal{O}_X|_{U_1}$$

el isomorfismo determinado por la sección $f_1 \otimes 1 \in \Gamma(U_1, \mathcal{L})$. Veamos qué ocurre fuera del abierto $U_1$. Tomamos $q_1$ un punto en $X - U_1$ y

$U_2$ un abierto principal de trivialidad para $\mathcal{L}$ que contenga a $q_1$. Como consecuencia de la Proposición 1.2.8, $U_2 \nsubseteq X - U_1$. Sea

$$\mathcal{L}|_{U_2} \xrightarrow{\approxeq} \mathcal{O}_X|_{U_2}$$

un isomorfismo de trivialidad. Sea $f_2 \in \Gamma(U_2, \mathcal{L})$ una sección que se corresponde al uno mediante este isomorfismo de trivialidad. En la intersección de $U_1$ y $U_2$

$$f_1\mathcal{O}_{U_1\cap U_2} = \mathcal{L}|_{U_1\cap U_2} = f_2\mathcal{O}_{U_1\cap U_2}$$

y por tanto $f_1$ y $f_2$ se diferencian en una unidad de $\Gamma(U_1 \cap U_2, \mathcal{O}_X)$ que denotaremos por $\frac{f_2}{f_1}$. Consideremos

$$\frac{f_2}{f_1} \in \Gamma(U_1 \cap U_2, \mathcal{O}_X^*) \subset \Gamma(U_1 \cap U_2, \mathcal{K}_X^*).$$

Por la Proposición 2.3.1 la restricción

$$\Gamma(U_2, \mathcal{K}_X^*) \xrightarrow{\approxeq} \Gamma(U_1 \cap U_2, \mathcal{K}_X^*)$$

es un isomorfismo. Por tanto, podemos extender la sección $\frac{f_2}{f_1} \in \Gamma(U_1 \cap U_2, \mathcal{K}_X^*)$ a una sección $a_2 \in \Gamma(U_2, \mathcal{K}_X^*)$ de forma única. Si $U_1 \cup U_2$ no recubre $X$, tomamos $q_2$ un punto en $X - (U_1 \cup U_2)$ y $U_3$ un abierto principal de trivialidad para $\mathcal{L}$ que contenga a $q_2$. Realizando el mismo proceso que para $U_2$, obtenemos una sección $\frac{f_3}{f_1} \in \Gamma(U_1 \cap U_3, \mathcal{K}_X^*)$ que se extiende de forma única a una sección $a_3$ de $\Gamma(U_3, \mathcal{K}_X^*)$.

Por cuasicompacidad, encontramos un recubrimiento finito por abiertos afines $\{U_2, \ldots, U_q\}$ de $X - U_1$ y secciones $\{a_2, \ldots, a_q\}$ de $\mathcal{K}_X^*$ en cada uno de esos abiertos, que proceden de secciones $\frac{f_i}{f_1} \in \Gamma(U_1 \cap U_i, \mathcal{K}_X^*)$, $i \in \{2, \ldots, q\}$.

Para demostrar que hemos construido un divisor de Cartier de $X$ falta comprobar que $a_i a_j^{-1}$ es una unidad del haz $\mathcal{O}_X$ en $U_i \cap U_j$. La sección $\frac{f_i}{f_j}$ es una unidad en $U_i \cap U_j$ de $\mathcal{O}_X$, ya que $f_i\mathcal{O}_X|_{U_i\cap U_j} = \mathcal{L}|_{U_i\cap U_j} = f_j\mathcal{O}_X|_{U_i\cap U_j}$. En $U_1 \cap U_i \cap U_j$, las secciones $\frac{f_i}{f_j}$ y $a_i a_j^{-1}$ de $\mathcal{K}_X^*$ coinciden. Por el isomorfismo que hay entre $\Gamma(U_1 \cap U_i \cap U_j, \mathcal{K}_X^*)$ y $\Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{K}_X^*)$, resulta que $a_i a_j^{-1} = \frac{f_i}{f_j}$ en $U_i \cap U_j$. Por tanto, $a_i a_j^{-1} \in \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{O}_X)$ es una unidad.

El sistema $\{(U_1, f_1), (U_2, a_2), \ldots, (U_q, a_q)\}$ define un divisor de Cartier de $X$ de forma que $\mathcal{O}_X(D) \approxeq \mathcal{L}$. $\square$

Corolario 2.3.5. *Si $X$ es un esquema proyectivo sobre un anillo noetheriano $A$, entonces* $\mathrm{ClCa}(X)$ *y* $\mathrm{Pic}(X)$ *son naturalmente isomorfos.*

Corolario 2.3.6. *Sea $X$ es un esquema proyectivo sobre un anillo noetheriano $A$. Entonces la aplicación natural*

$$H^0(X, \mathcal{K}_X^*/\mathcal{O}_X^*) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$$

*inducida por la sucesión exacta corta*

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X^* \longrightarrow \mathcal{K}_X^* \longrightarrow \mathcal{K}_X^*/\mathcal{O}_X^* \longrightarrow 0$$

*es sobreyectiva.*

Demostración. Se deduce del Teorema 2.3.4 y del Teorema 1.4.11. $\square$

CAPÍTULO 3

# Un haz inversible que no proviene de un divisor

## 3.1. Intersección de subvariedades

A continuación se estudia el problema de la intersección en esquemas completos, probando resultados básicos del número de intersección y de la equivalencia numérica de subvariedades. Estos conceptos son necesarios para la exposición del ejemplo de un esquema en el que existe un haz inversible que no proviene de un divisor de Cartier.

DEFINICIÓN. [**Ha1**, p. 427] Sea $X$ una variedad, $Y, Z \subset X$ subvariedades. Se dice que $Y$ y $Z$ se *intersecan propiamente* si toda componente irreducible de $Y \cap Z$ tiene codimensión igual a $\operatorname{codim}(Y) + \operatorname{codim}(Z)$.

DEFINICIÓN. [**Ha1**, p. 357] Sea $X$ una variedad de dimensión $n$ y sean $C_1, \ldots, C_n \subset X$ curvas. Se dice que $C_1, \ldots, C_n$ se *intersecan transversalmente* si para cualquier punto $p \in C_1 \cap \ldots \cap C_n$ las ecuaciones locales de $C_1, \ldots, C_n$ en $p$ generan el maximal $\mathfrak{m}_p \subset \mathcal{O}_{X,p}$.

TEOREMA 3.1.1. [**Ha1**, Chapter III,Theorem 2.7] *Sea $X$ un espacio topológico noetheriano y $\mathcal{F}$ un haz de grupos abelianos sobre $X$. Si $q > \dim X$ entonces $H^q(X, \mathcal{F}) = 0$.*

DEFINICIÓN. Sea $X$ un esquema completo sobre un cuerpo $k$. Dado $\mathcal{F}$ un haz coherente sobre $X$, los grupos de cohomología $H^i(X, \mathcal{F})$ son $k$-espacios vectoriales de dimensión finita ([**Ii**, Theorem 4.5]). Se define la *característica de Euler-Poincaré de* $\mathcal{F}$, y se denota $\chi(\mathcal{F})$, como:

$$\chi(\mathcal{F}) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i \dim_k H^i(X, \mathcal{F}).$$

PROPOSICIÓN 3.1.2. *Sea $X$ un esquema completo sobre un cuerpo $k$. Si una sucesión de $\mathcal{O}_X$-Módulos coherentes*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}' \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}'' \longrightarrow 0$$

*es exacta, entonces $\chi(\mathcal{F}) = \chi(\mathcal{F}') + \chi(\mathcal{F}'')$.*

DEMOSTRACIÓN. Dada la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}' \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}'' \longrightarrow 0$$

se tiene la siguiente sucesión exacta larga en cohomología

$$\begin{array}{ccccccc} & & & ... & \longrightarrow & H^{q-1}(X, \mathcal{F}'') & \longrightarrow \\ \longrightarrow & H^q(X, \mathcal{F}') & \longrightarrow & H^q(X, \mathcal{F}) & \longrightarrow & H^q(X, \mathcal{F}'') & \longrightarrow \\ \longrightarrow & H^{q+1}(X, \mathcal{F}') & \longrightarrow & ... & & & \end{array}$$

y como $\dim_k$ es una función aditiva se deduce el resultado. □

Los siguientes resultados se utilizarán en la demostración del Teorema 3.1.6.

TEOREMA 3.1.3. [**Ii**, Theorem 4.6*] *Sea $X$ un esquema y $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-Módulo coherente. Si $q > \dim \operatorname{Supp}(\mathcal{F})$ entonces $H^q(X, \mathcal{F}) = 0$.*

LEMA 3.1.4. [**Ii**, Theorem 7.13] *(Lemme de dévissage). Sea $X$ un esquema noetheriano y sea $\mathbb{K}$ una subcategoría plena de $\mathcal{O}_X$-Módulos coherentes. Supongamos que $\mathbb{K}$ satisface las siguientes propiedades:*

(1) *$\mathbb{K}$ es una subcategoría exacta.*
(2) *Dado $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-Módulo coherente si existe $m > 0$ tal que $\mathcal{F}^m \in \mathbb{K}$, $\mathcal{F} \in \mathbb{K}$.*
(3) *Dado $W$ un subesquema cerrado íntegro de $X$ existe $\mathcal{G} \in \mathbb{K}$ tal que* $\operatorname{Supp}(\mathcal{G}) = W$.
(4) *Si $\mathcal{F}$ es un haz coherente tal que* $\operatorname{Supp}(\mathcal{F}) = \{x\}$ *entonces $\mathcal{F} \in \mathbb{K}$.*

*Entonces $\mathbb{K}$ coincide con la categoría de los $\mathcal{O}_X$-Módulos coherentes.*

LEMA 3.1.5. [**Ii**, Lemma 7.14] *Sea $\mathcal{L}$ un haz inversible sobre un esquema íntegro $W$. Entonces existen dos $\mathcal{O}_W$-Ideales cuasicoherentes $\mathfrak{S}, \mathfrak{J}$ tal que $\mathfrak{J} = \mathfrak{S} \otimes \mathcal{L}^{-1}$. Además, si $Y, Z$ son los subesquemas cerrados* *de $W$ definidos por $\mathfrak{S}$ y $\mathfrak{J}$ respectivamente, entonces $Y \neq W$, $Z \neq W$ y las siguientes sucesiones son exactas:*

$$0 \longrightarrow \mathfrak{S} \otimes \mathcal{L}^m \longrightarrow \mathcal{O}_W \otimes \mathcal{L}^m \longrightarrow \mathcal{O}_Y \otimes \mathcal{L}^m \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \mathfrak{J} \otimes \mathcal{L}^m \longrightarrow \mathcal{O}_W \otimes \mathcal{L}^m \longrightarrow \mathcal{O}_Z \otimes \mathcal{L}^m \longrightarrow 0,$$

*con $m \in \mathbb{N}$.*

DEMOSTRACIÓN. Basta tomar $\mathfrak{S} = \mathcal{L} \cap \mathcal{O}_W, \mathfrak{J} = \mathfrak{S} \otimes \mathcal{L}^{-1}$. □

DEFINICIÓN. [**Ha2**, p. 29] Un *polinomio numérico* en $n_1, \ldots, n_t$ es un polinomio en las variables $n_1, \ldots, n_t$ con coeficientes racionales que toma valores enteros cuando $n_1, \ldots, n_t$ toman valores enteros.

TEOREMA 3.1.6. *Sea $X$ un esquema completo sobre un cuerpo $k$, $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-Módulo coherente y $\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_t$ haces inversibles en $X$. Entonces $\chi(\mathcal{L}_1^{n_1} \otimes \ldots \otimes \mathcal{L}_t^{n_t} \otimes \mathcal{F})$ es un polinomio numérico en las variables $n_1, \ldots, n_t$ de grado $\leq \dim \operatorname{Supp}(\mathcal{F})$.*

DEMOSTRACIÓN. Se hará para el caso $t = 1$. Para $t > 1$ es totalmente análoga. Consideremos $\mathbb{K}$ la subcategoría de todos los $\mathcal{O}_X$-Módulos coherentes que verifican la propiedad. Basta comprobar que $\mathbb{K}$ cumple las propiedades del Lema 3.1.4.

1. Consideremos una sucesión exacta corta de $\mathcal{O}_X$-Módulos coherentes $0 \longrightarrow \mathcal{F}' \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}'' \longrightarrow 0$. Por la Proposición 3.1.2 se tiene que $\chi(\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}) = \chi(\mathcal{F}' \otimes \mathcal{L}) + \chi(\mathcal{F}'' \otimes \mathcal{L})$ para cualquier $m > 0$. Además, de las sucesiones exactas cortas $0 \longrightarrow \mathcal{F}'_x \longrightarrow \mathcal{F}_x \longrightarrow \mathcal{F}''_x \longrightarrow 0, \forall x \in X$, se deduce que

$$\operatorname{Supp}(\mathcal{F}) = \operatorname{Supp}(\mathcal{F}') \cup \operatorname{Supp}(\mathcal{F}'')$$

y, por tanto, se verifica la propiedad 1.

2. Sea $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-Módulo coherente tal que existe $r > 0$ con $\mathcal{F}^r \in \mathbb{K}$. De la Proposición 3.1.2 y del hecho de que $\operatorname{Supp}(\mathcal{F}) = \operatorname{Supp}(\mathcal{F}^r)$ se deduce fácilmente que $\mathcal{F} \in \mathbb{K}$.

4. Sea $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-Módulo coherente tal que $\operatorname{Supp}(\mathcal{F}) = \{x\}$. Entonces por el Teorema 3.1.3 $H^i(X, \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^m) = 0, \forall i > 0$. Por otra parte,

como $\mathrm{Supp}(\mathcal{F}) = \{x\}$ y $\mathcal{F}$ es coherente, $\mathcal{F} = i_*\widetilde{V}$ donde $i : \{x\} \hookrightarrow X$ y $V$ es un $k(x)$-espacio vectorial. Entonces

$$\begin{aligned} H^0(X, \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^m) &\approxeq \Gamma(X, i_*\widetilde{V} \otimes \mathcal{L}^m) \\ \approxeq &\Gamma(X, i_*(\widetilde{V} \otimes i^*\mathcal{L}^m)) \approxeq \Gamma(X, i_*\widetilde{V}) = V \end{aligned}$$

por la fórmula de la proyección ([**Ha1**, p. 124, Exercise 5.1.d]). Con lo cual $\chi(\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^m) = \dim_k V$ es un polinomio constante.

3. Razonemos por inducción en $\dim W$. Por inducción noetheriana podemos suponer que la propiedad 3 se verifica para cualquier cerrado propio íntegro de $W$. Será suficiente probar que si $W$ es un esquema íntegro y para todo $\mathcal{O}_W$-Módulo coherente $\mathcal{F}$ con $\mathrm{Supp}(\mathcal{F}) \subsetneq W$ se tiene que $\mathcal{F} \in \mathbb{K}$, entonces $\mathcal{O}_W \in \mathbb{K}$. Con las notaciones del Lema 3.1.5

$$\begin{aligned} \chi(\mathcal{O}_W \otimes \mathcal{L}^m) &- \chi(\mathcal{O}_Y \otimes \mathcal{L}^m) = \\ &= \chi(\mathfrak{G} \otimes \mathcal{L}^m) \\ &= \chi(\mathfrak{J} \otimes \mathcal{L}^{m+1}) \\ &= \chi(\mathcal{O}_W \otimes \mathcal{L}^{m+1}) - \chi(\mathcal{O}_Z \otimes \mathcal{L}^{m+1}). \end{aligned}$$

Entonces se tiene que

$$\chi(\mathcal{O}_W \otimes \mathcal{L}^{m+1}) - \chi(\mathcal{O}_W \otimes \mathcal{L}^m) = \chi(\mathcal{O}_Z \otimes \mathcal{L}^{m+1}) - \chi(\mathcal{O}_Y \otimes \mathcal{L}^m).$$

Como $Y = \mathrm{Supp}(\mathcal{O}_Y) \neq W$ y $Z = \mathrm{Supp}(\mathcal{O}_Z) \neq W$ por hipótesis de inducción resulta que $\mathcal{O}_Y, \mathcal{O}_Z \in \mathbb{K}$ y, por tanto, $\chi(\mathcal{O}_W \otimes \mathcal{L}^m)$ es un polinomio numérico en $m$. Además

$$\begin{aligned} \mathrm{gr}\chi(\mathcal{O}_W \otimes \mathcal{L}^m) &\leq \{\mathrm{gr}\chi(\mathcal{O}_Z \otimes \mathcal{L}^{m+1}), \mathrm{gr}\chi(\mathcal{O}_Y \otimes \mathcal{L}^m)\} + 1 \\ &\leq \dim W. \end{aligned}$$

□

A partir de ahora supondremos $X$ un esquema completo sobre un cuerpo $k$. Por $\mathcal{F}$ denotaremos un $\mathcal{O}_X$-Módulo coherente y $\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_t$ serán haces inversibles sobre $X$ de modo que $\dim \mathrm{Supp}(\mathcal{F}) \leq t$.

Definición. Se define el *número de intersección* $(\mathcal{L}_1 \cdots \mathcal{L}_t \cdot \mathcal{F})_X$ de $\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_t$ con $\mathcal{F}$ como el coeficiente del monomio $n_1 \cdots n_t$ del polinomio numérico $\chi(\mathcal{L}^{n_1} \otimes \ldots \otimes \mathcal{L}^{n_t} \otimes \mathcal{F})$.

En particular dados $D_1, \ldots, D_t \in \mathrm{Div}_{\mathrm{C}}(X)$, $\mathcal{O}_X(D_1), \ldots, \mathcal{O}_X(D_t)$ sus haces inversibles asociados y dado $Y$ un subesquema cerrado de $X$ de dimensión $t$, llamamos *número de intersección* de $D_1, \ldots, D_t$ con $Y$ en $X$, y se denota por $(D_1, \ldots, D_t \cdot Y)_X$ a $(\mathcal{O}_X(D_1) \cdots \mathcal{O}_X(D_t) \cdot \mathcal{O}_Y)_X$. Un caso especialmente importante es $t = 1$. Al entero $(D \cdot C)_X$ con $C$ una curva de $X$ lo denominaremos *número de intersección de una curva y un divisor*.

OBSERVACIÓN. El número de intersección es invariante bajo equivalencia lineal de divisores.

PROPOSICIÓN 3.1.7. [**K2**, Proposition 0] *Se tiene que* $(\mathcal{L}_1 \cdots \mathcal{L}_t \cdot \mathcal{F})_X$ *es un entero.*

DEMOSTRACIÓN. Resulta como consecuencia de un argumento técnico (véase [**K2**, Lemma 1]). □

PROPOSICIÓN 3.1.8. *Si* $\dim \mathrm{Supp}\,(\mathcal{F}) < t$ *entonces* $(\mathcal{L}_1 \cdots \mathcal{L}_t \cdot \mathcal{F})_X = 0$*. Además, si* $\dim \mathrm{Supp}(\mathcal{F}) = 0$*, se tiene que*

$$(\mathcal{F})_X = \chi(\mathcal{F}) = \dim_k \Gamma(X, \mathcal{F}).$$

DEMOSTRACIÓN. Si $\dim \mathrm{Supp}\,(\mathcal{F}) < t$ el grado de $\chi(\mathcal{L}^{n_1} \otimes \ldots \otimes \mathcal{L}^{n_t} \otimes \mathcal{F})$ es menor que $t$ y, por tanto

$$(\mathcal{L}_1 \cdots \mathcal{L}_t \cdot \mathcal{F})_X = 0.$$

Por otra parte, por la Proposición 3.1.3 $\chi(\mathcal{F}) = \dim_k H^0(X, \mathcal{F})$. □

PROPOSICIÓN 3.1.9. *Resulta que* $(\mathcal{L}_1 \cdots \mathcal{L}_t \cdot \mathcal{F})_X$ *es una forma $t$-lineal simétrica en* $\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_t$*.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $\mathcal{M}, \mathcal{N}, \mathcal{L}_2, \ldots, \mathcal{L}_t$ haces inversibles sobre $X$. Se tiene que

$$\begin{aligned}\chi(\mathcal{M}^m \otimes \mathcal{N}^n \otimes \mathcal{L}_2^{n_2} \otimes \ldots \otimes \mathcal{L}_t^{n_t} \otimes \mathcal{F}) &= \\ =&(\mathcal{M} \cdot \mathcal{L}_2 \cdots \mathcal{L}_t \cdot \mathcal{F})_X \cdot m n_2 \ldots n_t \\ &+ (\mathcal{N} \cdot \mathcal{L}_2 \cdots \mathcal{L}_t \cdot \mathcal{F})_X \cdot n n_2 \ldots n_t + \ldots\end{aligned}$$

haciendo $n = 0$ y $m = 0$, sucesivamente. En particular, si $n = m = n_1$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\chi((\mathcal{M} \otimes \mathcal{N})^{n_1} \otimes \mathcal{L}_2^{n_2} \otimes \ldots \otimes \mathcal{L}_t^{n_t} \otimes \mathcal{F}) = \\
=& (\mathcal{M} \cdot \mathcal{L}_2 \cdots \mathcal{L}_t \cdot \mathcal{F})_X \cdot n_1 n_2 \ldots n_t \\
&+ (\mathcal{N} \cdot \mathcal{L}_2 \cdots \mathcal{L}_t \cdot \mathcal{F})_X \cdot n_1 n_2 \ldots n_t + \ldots = \\
=& ((\mathcal{M} \cdot \mathcal{L}_2 \cdots \mathcal{L}_t \cdot \mathcal{F})_X + (\mathcal{N} \cdot \mathcal{L}_2 \cdots \mathcal{L}_t \cdot \mathcal{F})_X) \cdot n_1 n_2 \ldots n_t + \ldots
\end{aligned}$$

con lo cual

$$\begin{aligned}
&((\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}) \cdot \mathcal{L}_2 \cdots \mathcal{L}_t \cdot \mathcal{F})_X = \\
&\qquad = (\mathcal{M} \cdot \mathcal{L}_2 \cdots \mathcal{L}_t \cdot \mathcal{F})_X + (\mathcal{N} \cdot \mathcal{L}_2 \cdots \mathcal{L}_t \cdot \mathcal{F})_X.
\end{aligned}$$

□

PROPOSICIÓN 3.1.10. *Si* $0 \longrightarrow \mathcal{F}' \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}'' \longrightarrow 0$ *es una sucesión exacta corta de* $\mathcal{O}_X$*-Módulos coherentes entonces*

$$(\mathcal{L}_1 \cdots \mathcal{L}_t \cdot \mathcal{F})_X = (\mathcal{L}_1 \cdots \mathcal{L}_t \cdot \mathcal{F}')_X + (\mathcal{L}_1 \cdots \mathcal{L}_t \cdot \mathcal{F}'')_X \,.$$

DEMOSTRACIÓN. Basta aplicar la Proposición 3.1.2. □

PROPOSICIÓN 3.1.11. *Sea* $D$ *un divisor efectivo en* $X$ *con* $\mathrm{Supp}(D) \cap \mathrm{Ass}(\mathcal{F}) = \varnothing$. *Entonces*

$$(\mathcal{O}_X(D) \cdot \mathcal{L}_2 \cdots \mathcal{L}_t \cdot \mathcal{F})_X = (\mathcal{L}_2 \cdots \mathcal{L}_t \cdot \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_D)_X \,.$$

DEMOSTRACIÓN. Como $\mathrm{Supp}(D) \cap \mathrm{Ass}(\mathcal{F}) = \varnothing$ se tiene la siguiente sucesión exacta corta (se comprueba en las fibras)

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_X(D) \longrightarrow \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_D \otimes \mathcal{O}_X(D) \longrightarrow 0$$

y tensorizando con $\mathcal{O}_X(D)^{n_1 - 1} \otimes \mathcal{L}_2^{n_2} \otimes \ldots \otimes \mathcal{L}_t^{n_t}$ se obtiene la sucesión exacta corta

$$\begin{aligned}
0 &\longrightarrow \mathcal{O}_X(D)^{n_1-1} \otimes \mathcal{L}_2^{n_2} \otimes \ldots \otimes \mathcal{L}_t^{n_t} \otimes \mathcal{F} \\
&\longrightarrow \mathcal{O}_X(D)^{n_1} \otimes \mathcal{L}_2^{n_2} \otimes \ldots \otimes \mathcal{L}_t^{n_t} \otimes \mathcal{F} \\
&\longrightarrow \mathcal{O}_X(D)^{n_1} \otimes \mathcal{L}_2^{n_2} \otimes \ldots \otimes \mathcal{L}_t^{n_t} \otimes \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_D \longrightarrow 0.
\end{aligned}$$

Por la Proposición 3.1.2

$$
\begin{aligned}
\chi(\mathcal{O}_X(D)^{n_1} \otimes \mathcal{L}_2^{n_2} \otimes \ldots \otimes \mathcal{L}_t^{n_t} \otimes \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_D) = \\
=&\chi(\mathcal{O}_X(D)^{n_1} \otimes \mathcal{L}_2^{n_2} \otimes \ldots \otimes \mathcal{L}_t^{n_t} \otimes \mathcal{F}) \\
&- \chi(\mathcal{O}_X(D)^{n_1-1} \otimes \mathcal{L}_2^{n_2} \otimes \ldots \otimes \mathcal{L}_t^{n_t} \otimes \mathcal{F}) = \\
=&(\mathcal{O}_X(D) \cdot \mathcal{L}_2 \cdots \mathcal{L}_t \cdot \mathcal{F})_X \, n_1 \cdots n_t + \ldots \\
&- (\mathcal{O}_X(D) \cdot \mathcal{L}_2 \cdots \mathcal{L}_t \cdot \mathcal{F})_X (n_1 - 1) \cdots n_t - \ldots = \\
=&(\mathcal{O}_X(D) \cdot \mathcal{L}_2 \cdots \mathcal{L}_t \cdot \mathcal{F})_X n_2 \cdots n_t + \ldots
\end{aligned}
$$

Por otra parte, el coeficiente del monomio $n_2 \cdots n_t$ en

$$\chi(\mathcal{O}_X(D)^{n_1} \otimes \mathcal{L}_2^{n_2} \otimes \ldots \otimes \mathcal{L}_t^{n_t} \otimes \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_D)$$

es $(\mathcal{L}_2 \cdots \mathcal{L}_t \cdot \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_D)_X$ de donde se deduce el resultado. □

COROLARIO 3.1.12. *Sea $X$ una superficie y $C, E \subset X$ dos curvas. Entonces el número de intersección de $C$ y $E$ es simétrico.*

DEMOSTRACIÓN. Aplicando la Proposición 3.1.11 se deduce que

$$
\begin{aligned}
(C \cdot E)_X &= (\mathcal{O}_X(C) \cdot \mathcal{O}_E)_X = (\mathcal{O}_E \otimes \mathcal{O}_C)_X = \\
&= (\mathcal{O}_C \otimes \mathcal{O}_E)_X = (\mathcal{O}_X(E) \cdot \mathcal{O}_C)_X = (E \cdot C)_X \,.
\end{aligned}
$$

□

PROPOSICIÓN 3.1.13. *Sean $C \subset Y \subset X$ donde $C, Y$ son subesquemas cerrados y $\mathcal{L}$ es un haz inversible sobre $X$. Entonces*

$$(\mathcal{L} \cdot \mathcal{O}_C)_X = (i^*\mathcal{L} \cdot \mathcal{O}_C)_Y \,,$$

*donde $i : Y \hookrightarrow X$ es el encaje de $Y$ en $X$.*

*En particular si $Y, X$ son variedades y $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X(D)$ con $D$ un divisor de Cartier se tiene que*

$$(D \cdot C)_X = (i^*\mathcal{O}_X(D) \cdot \mathcal{O}_C)_Y = (D' \cdot \mathcal{O}_C)_Y = (D' \cdot C)_Y \,,$$

*donde $D' \in \mathrm{Div_C}(Y)$ es tal que $\mathcal{O}_Y(D') = i^*\mathcal{O}_X(D)$, y estamos denotando $i^*\mathcal{O}_C = \mathcal{O}_C$.*

DEMOSTRACIÓN. Basta considerar que $\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_C = \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_Y \otimes \mathcal{O}_C$. □

PROPOSICIÓN 3.1.14. *Sea $X$ una variedad proyectiva no singular e $Y$ una subvariedad cerrada. Entonces si $\langle\ \rangle$ es otro símbolo que satisface los resultados Proposición 3.1.8, Proposición 3.1.9 y Proposición 3.1.11 se tiene que*

$$(\mathcal{L}_1 \cdots \mathcal{L}_t \cdot \mathcal{O}_Y)_X = \langle \mathcal{L}_1 \cdots \mathcal{L}_t \cdot \mathcal{O}_Y \rangle_X .$$

DEMOSTRACIÓN. Se prueba por inducción. Si $t = 0$ resulta por la Proposición 3.1.8 que $\langle \mathcal{O}_Y \rangle_X = (\mathcal{O}_Y)_X$. Supongamos que $t > 0$ y que se verifica para valores menores que $t$. Por el Corolario 1.5.5,

$$\mathcal{L}_1 \approxeq \mathcal{O}_X(C - H)$$

donde $C, H$ son divisores efectivos. Entonces resulta que

$$\begin{aligned}
&(\mathcal{L}_1 \cdots \mathcal{L}_t \cdot \mathcal{O}_Y)_X = \\
&\underset{(3.1.9)}{=} (\mathcal{O}_X(C) \cdot \mathcal{L}_2 \cdots \mathcal{L}_t \cdot \mathcal{O}_Y)_X - (\mathcal{O}_X(H) \cdot \mathcal{L}_2 \cdots \mathcal{L}_t \cdot \mathcal{O}_Y)_X \\
&\underset{(3.1.11)}{=} (\mathcal{L}_2 \cdots \mathcal{L}_t \cdot \mathcal{O}_Y \otimes \mathcal{O}_C)_X - (\mathcal{L}_2 \cdots \mathcal{L}_t \cdot \mathcal{O}_Y \otimes \mathcal{O}_H)_X \\
&\underset{(induc.)}{=} \langle \mathcal{L}_2 \cdots \mathcal{L}_t \cdot \mathcal{O}_Y \otimes \mathcal{O}_C \rangle_X - \langle \mathcal{L}_2 \cdots \mathcal{L}_t \cdot \mathcal{O}_Y \otimes \mathcal{O}_H \rangle_X \\
&\underset{(3.1.11)}{=} \langle \mathcal{O}_X(C) \cdot \mathcal{L}_2 \cdots \mathcal{L}_t \cdot \mathcal{O}_Y \rangle_X - \langle \mathcal{O}_X(H) \cdot \mathcal{L}_2 \cdots \mathcal{L}_t \cdot \mathcal{O}_Y \rangle_X \\
&\underset{(3.1.9)}{=} \langle \mathcal{L}_1 \cdots \mathcal{L}_t \cdot \mathcal{O}_Y \rangle_X .
\end{aligned}$$

□

COROLARIO 3.1.15. *Sean $X$ una variedad proyectiva no singular, $D \in \mathrm{Div}_{\mathrm{C}}(X)$ y $C$ una curva en $X$. Entonces*

$$(D \cdot C)_X = (\mathcal{O}_X(D) \cdot \mathcal{O}_C)_X = i(D \cdot C; X)$$

*donde $i(D \cdot C; X)$ denota el número de intersección clásico[1] de $D$ y $C$ en $X$.*

Con la notación y resultados establecidos hasta ahora es posible comprender el enunciado del siguiente resultado. Omitiremos su demostracción y remitimos al lector a la prueba de Harsthorne (véase [**Ha2**, Theorem 5.1, Criterio de Nakai-Moishezon]).

[1]Si $X$ es una superficie puede verse la definición en [**Ha1**, Chapter V, §I]

TEOREMA 3.1.16. [**Ha2**, Theorem 5.1, Criterio de Nakai-Moishezon] *Sea $X$ una variedad completa sobre el cuerpo $k$. Entonces $X$ es proyectiva si, y sólo si, existe $D \in \mathrm{Div}_{\mathrm{C}}(X)$ tal que $\forall Y \subset X$ subesquema íntegro con $m = \dim Y$ se verifica que $(D^m \cdot Y)_X > 0$.*

DEFINICIÓN. [**Ha2**, p. 40] Supongamos que $X$ es un esquema completo. Sea $F_1(X)$ el grupo abeliano libre generado por el conjunto de todas las curvas íntegras en $X$. Llamaremos 1-*ciclo* a todo elemento de $F_1(X)$. Extendemos el número de intersección por linealidad de la siguiente forma: Si $C = \sum n_i C_i \in F_1(X)$ y $D \in \mathrm{Div}_{\mathrm{C}}(X)$ se define $(D \cdot C)_X = \sum n_i (D \cdot C_i)_X$.

DEFINICIÓN. [**Ha2**, p. 40] Supongamos que $X$ es un esquema completo. Dos curvas $C$ y $E$ son *numéricamente equivalentes*, y se denota por $C \approx_X E$ si $(D \cdot C)_X = (D \cdot E)_X, \forall D \in \mathrm{Div}_{\mathrm{C}}(X)$. Se dice que $D, D' \in \mathrm{Div}_{\mathrm{C}}(X)$ son *numéricamente equivalentes*, y se escribe $D \approx_X D'$, si $(D \cdot C)_X = (D' \cdot C)_X, \forall C$ curva en $X$. Un divisor $D \in \mathrm{Div}_{\mathrm{C}}(X)$ es *numéricamente equivalente a cero* si $(D \cdot C)_X = 0, \forall C$ curva en $X$.

COROLARIO 3.1.17. *Sea $X$ una variedad completa no singular e $Y \subset X$ una subvariedad no singular de dimensión 2. Si $L$, $M \subset Y$ son dos curvas linealmente equivalentes como divisores en $Y$ entonces $L \approx_X M$.*

DEMOSTRACIÓN. Dado $D \in \mathrm{Div}_{\mathrm{C}}(X)$ e $i : Y \hookrightarrow X$ el encaje canónico, sea $D' \in \mathrm{Div}_{\mathrm{C}}(Y)$ tal que $\mathcal{O}_Y(D') = i^*\mathcal{O}_X(D)$. Por el Corolario 1.5.5, sean $C', H'$ dos divisores efectivos en $Y$ tal que $\mathcal{O}_Y(D') = \mathcal{O}_Y(C' - H')$. Con esto se tiene, por las Proposiciones 3.1.13 y 3.1.11, que

$$\begin{aligned}
(D \cdot L)_X &= (\mathcal{O}_X(D) \cdot \mathcal{O}_L)_X = \\
&= (i^*\mathcal{O}_X(D) \cdot \mathcal{O}_L)_Y \\
&= (\mathcal{O}_Y(D') \cdot \mathcal{O}_L)_Y \\
&= (\mathcal{O}_Y(C') \cdot \mathcal{O}_L)_Y - (\mathcal{O}_Y(H') \cdot \mathcal{O}_L)_Y \\
&= (\mathcal{O}_Y(L) \cdot \mathcal{O}_{C'})_Y - (\mathcal{O}_Y(L) \cdot \mathcal{O}_{H'})_Y \,.
\end{aligned}$$

Razonando igual con $M$ se llega a que

$$(D \cdot M)_X = (\mathcal{O}_Y(M) \cdot \mathcal{O}_{C'})_Y - (\mathcal{O}_Y(M) \cdot \mathcal{O}_{H'})_Y$$

y como $L \sim_Y M$ ambas expresiones son iguales. $\square$

## 3.2. Ejemplo de una variedad completa no proyectiva

Es conocido que toda variedad completa no singular de dimensión 2 es proyectiva ([**Ha2**, Chapter II, Theorem 4.2]). Por tanto, toda variedad completa, no singular y no proyectiva ha de tener necesariamente dimensión mayor que 2. Antes de construir tal ejemplo veremos algunas propiedades previas sobre explosiones.

3.2.1. Sea $X$ una variedad cuasi-proyectiva no singular 3-dimensional tal que contiene una superficie $Y$ no singular. Sean $C, E \subset X$ dos curvas no singulares racionales irreducibles que se cortan transversalmente en un único punto $p_0$. Supongamos además que $C$ y $E$ están contenidas en la superficie $Y$. Sea $\pi_C : \widetilde{X} \longrightarrow X$ la explosión de $X$ respecto a $C$, y $\widetilde{C} = \pi_C^{-1}(C)$

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{C} & \longrightarrow & \widetilde{X} \\ \Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle \pi_C} \\ C & \longrightarrow & X. \end{array}$$

Localmente, $\widetilde{C}$ es isomorfa a $C \times \mathbb{P}^1_k$, es decir, existe un recubrimiento por abiertos $\{U_\alpha\}$ de $X$ tal que

$$\pi_C^{-1}(C \cap U_\alpha) = (C \cap U_\alpha) \times \mathbb{P}^1_k.$$

La fibra de un punto $p \in C$ es

$$\pi_C^{-1}(p) = \mathrm{Spec}(k(p)) \times \mathbb{P}^1_k,$$

denotaremos esta recta por $L_p$. Por [**S**, Vol. 2, p. 74, Proposition]

$$\pi_C^{-1}(E) = \pi_C^{-1}(p_0) \cup E_1$$

donde $E_1$ es la transformada estricta de $E$ mediante la explosión $\pi_C$. Como $E$ es no singular en $p_0$, se tiene que $E_1 \approxeq E$ y, entonces, podemos suponer que en $p_0$ vienen dadas por la misma ecuación local $g$ pensada como elemento del cuerpo de funciones racionales. Además para simplificar la notación escribiremos $E = E_1 \subset \widetilde{X}$, así, como 1-ciclo,

$$\pi_C^{-1}(E) = L_0 + E$$

donde $L_0 := L_{p_0}$.

Sea $p_0' \in \widetilde{C} \cap E_1$ tal que $\pi_C(p_0') = p_0$. Resulta que $\widetilde{C}$ y $E_1$ se cortan transversalmente en $p_0'$. En efecto, consideremos $h$ la ecuación local de $Y \subset X$ en $p_0$, y sean $f$ y $g$ las ecuaciones locales de $C$ y $E \subset Y$ respectivamente en $p_0$. La ecuación local de la explosión $\widetilde{X} \subset X \times \mathbb{P}^1_k$ en un entorno de $p_0'$ es $T_0 f = T_1 h$ donde $T_0, T_1$ son las coordenadas homogéneas en $\mathbb{P}^1_k$. Sea $p_0' = (p_0, t_0 : t_1) \in \widetilde{X}$. Supongamos, por ejemplo, que $t_0 \neq 0$ (el caso $t_1 \neq 0$ sería análogo). Entonces, en un entorno de $p_0'$, las ecuaciones de la explosión son de la forma $f = \frac{T_1}{T_0} h = sh$ donde $s = \frac{T_1}{T_0}$. Como $C$ y $E$ se cortan transversalmente en $p_0$, las funciones $f, g, h$ constituyen un sistema local de parámetros de $p_0$ en $X$ y, por tanto, el maximal de $p_0' \in \widetilde{X}$ es $\mathfrak{m}_{\widetilde{X}, p_0'} = (f, g, s - s(p_0'))$.

Por otra parte, como $C$ es una curva racional, todos sus puntos son linealmente equivalentes (como divisores en $C$) dado que tienen el mismo grado ([**Ha1**, Corollary 6.10]), es decir:

$$p_1 \sim_C p_2, \quad \forall p_1, p_2 \in C.$$

Entonces, como $C$ y $\widetilde{C}$ son íntegros y $\pi_C|_{\widetilde{C}}$ es un morfismo dominante, por la Proposición 1.5.8 se tiene la equivalencia de divisores

$$L_{p_1} \sim_{\widetilde{C}} L_{p_2}, \quad \forall p_1, p_2 \in C.$$

Sea $\pi_{E_1} : \widetilde{\widetilde{X}} \longrightarrow \widetilde{X}$ la explosión de la variedad $\widetilde{X}$ respecto a $E_1 = E$ y $\widetilde{E_1} := \pi_{E_1}^{-1}(E_1)$.

$$\begin{tikzcd} \widetilde{E_1} \arrow[r] \arrow[d] & \widetilde{\widetilde{X}} \arrow[d, "\pi_{E_1}"] \\ E_1 \arrow[r] & \widetilde{X} \end{tikzcd}$$

Denotamos por $M_q$ a la fibra de un punto $q \in E_1$, es decir,

$$M_q = \pi_{E_1}^{-1}(q) \cong \operatorname{Spec}(k(q)) \times \mathbb{P}^1_k.$$

En particular, denotaremos $M_0 := M_{\mathfrak{p}'_0}$. Además, se tiene que

$$\pi_{E_1}^{-1}(L_p) \cong L_p, \quad \forall p \in C - E.$$

De nuevo para no complicar la expresión cometeremos el abuso de notación que supone identificar $\pi_{E_1}^{-1}(L_p)$ con $L_p$ al escribir $L_p \subset \widetilde{\widetilde{X}}$, para cada $p \in C - E$. Por otra parte, por [**S**, Vol. 2, p. 74, Proposition]

$$\begin{aligned}\pi_{E_1}^{-1}(L_0) &= \pi_{E_1}^{-1}(L_0 \cap E_1) \cup Bl_{L_0 \cap E_1}(L_0)\\ &= \pi_{E_1}^{-1}(p'_0) \cup Bl_{p'_0}(L_0)\\ &= M_0 + L_0\end{aligned}$$

ya que [2]$Bl_{p'_0}(L_0) = L_0$ por ser $L_0$ no singular en $p'_0$.

Se tiene que $\pi_{E_1}^{-1}(\widetilde{C})$ es irreducible e igual a la explosión de $\widetilde{C}$ respecto a $p_0$. En efecto, por [**S**, Vol. 2, p. 74, Proposition] las componentes irreducibles de $\pi_{E_1}^{-1}(\widetilde{C})$ son $\pi_{E_1}^{-1}(p'_0)$ y $Bl_{p'_0}(\widetilde{C})$. Veamos que $\pi_{E_1}^{-1}(p'_0) \subset Bl_{p'_0}(\widetilde{C}) = \overline{\pi_{E_1}^{-1}(\widetilde{C} - p'_0)}$ o, equivalentemente, que $p'_0 \in \pi_{E_1}(Bl_{p'_0}(\widetilde{C}))$. Dado que $\widetilde{C} - p'_0 = \pi_{E_1}(\pi_{E_1}^{-1}(\widetilde{C} - p'_0)) \subset \pi_{E_1}(Bl_{p'_0}(\widetilde{C}))$ resulta que

$$\overline{\widetilde{C} - p'_0} \subset \overline{\pi_{E_1}(Bl_{p'_0}(\widetilde{C}))} = \pi_{E_1}(Bl_{p'_0}(\widetilde{C}))$$

por ser $\pi_{E_1}$ un morfismo propio ([**Ha1**, Proposition 7.16]) y por tanto cerrado. Entonces, $p'_0 \in \pi_{E_1}(Bl_{p'_0}(\widetilde{C}))$.

Como $L_p \sim_{\widetilde{C}} L_0, \forall p \in C - \{p_0\}$, y además $\widetilde{C}$ y $\pi_{E_1}^{-1}(\widetilde{C})$ son íntegros y $\pi_{E_1}|_{\pi_{E_1}^{-1}(\widetilde{C})}$ es dominante, por la Proposición 1.5.8 se tiene, para todo $p \in C - \{p_0\}$, que

$$\pi_{E_1}^{-1}(L_p) \sim_{\pi_{E_1}^{-1}(\widetilde{C})} \pi_{E_1}^{-1}(L_0),$$

es decir,

$$L_p \sim_{\pi_{E_1}^{-1}(\widetilde{C})} M_0 + L_0.$$

Por el Corolario 3.1.17 se deduce que

$$L_p \approx_{\widetilde{\widetilde{X}}} M_0 + L_0, \quad \forall p \in C - \{p_0\}. \tag{6}$$

[2]Dada $X$ una variedad e $Y$ una subvariedad cerrada de $X$, $Bl_Y(X)$ denota la explosión de $X$ a lo largo de $Y$.

Además, como $q_1 \sim_{E_1} q_2, \forall q_1, q_2 \in E_1$, se tiene que $M_{q_1} \sim_{\widetilde{E_1}} M_{q_2}$ y, por tanto, aplicando de nuevo el Corolario 3.1.17

$$M_{q_1} \approx_{\widetilde{\widetilde{X}}} M_{q_2}, \quad \forall q_1, q_2 \in E_1 = E. \tag{7}$$

De las expresiones (6) y (7) se concluye que

$$L_p \approx_{\widetilde{\widetilde{X}}} M_q + L_0, \quad \forall p \in C - \{p_0\}, \forall q \in E. \tag{8}$$

Construcción 3.2.2. Sea $X$ una variedad proyectiva no singular 3-dimensional tal que contiene una superficie $Y$ no singular y dos curvas $C, E$ no singulares racionales irreducibles que se cortan transversalmente en dos puntos cerrados $p_0, p_1$. Supongamos además que $C$ y $E$ están contenidas en la superficie $Y$ (por ejemplo, $X = \mathbb{P}^3_k, Y = \mathbb{P}^2_k, C$ y $E$ una recta y una cónica en $Y$ que se cortan en dos puntos distintos).

Sea $U = X - \{p_1\} \subset X$. Se tiene que $C \cap U$ y $E \cap U$ se cortan transversalmente en el punto $p_0$. Como todos los razonamientos hechos en la construcción 3.2.1 son locales, podemos aplicar dicha construcción a la variedad cuasi-proyectiva $U$, la superficie $Y \cap U \subset U$ y las curvas $C \cap U, E \cap U \subset U$. Es decir, explotamos primero $U$ con centro $C \cap U$ y luego respecto a la transformada de $E \cap U$. Sea

$$\sigma_0 : X_0 \longrightarrow X - \{p_1\}$$

el morfismo obtenido mediante estas dos explosiones consecutivas. De acuerdo con las notaciones utilizadas en la construcción anterior sean

$$L_p = \sigma_0^{-1}(p), \quad \forall p \in C \cap U, \, p \neq p_0,$$
$$M_q = \sigma_0^{-1}(q), \quad \forall q \in E \cap U, \, q \neq p_0$$

y, sean $M_0$ y $L_0$ los 1-ciclos determinados por $\sigma_0^{-1}(p_0) = M_0 + L_0$ (de hecho $M_0$ y $L_0$ son rectas proyectivas). Siendo $M_{p_0} = M_0$ en $X_0$ se tiene que

$$L_p \approx_{X_0} M_q + L_0, \quad \forall p \in C \cap U - \{p_0\}, \forall q \in E \cap U.$$

Tomando $V = X - \{p_0\} \subset X$ las curvas $C \cap V$ y $E \cap V$ de la variedad cuasi-proyectiva $V$ se cortan transversalmente en el punto

$p_1 \in V$. Aplicamos ahora la construcción hecha en 3.2.1 a $p_1 \in V$, $Y \cap V \subset V$, $E \cap V$ y $C \cap V \subset V$. Obsérvese que, en este caso explotamos primero respecto a $E \cap V$ y luego respecto a la transformada de $C \cap V$. Construimos así la variedad $X_1$ y el morfismo

$$\sigma_1 : X_1 \longrightarrow X - \{p_0\}.$$

Llamamos

$$L'_p = \sigma_1^{-1}(p), \quad \forall p \in C \cap V,\, p \neq p_1,$$
$$M'_q = \sigma_1^{-1}(q), \quad \forall q \in E \cap V,\, q \neq p_1$$

y, sean $M_1$ y $L_1$ los 1-ciclos determinados por $\sigma_1^{-1}(p_1) = M_1 + L_1$ (en concreto, $M_1$ y $L_1$ son rectas proyectivas). Denotando $L'_{p_1} = L_1$ en $X_1$ se tienen las equivalencias

$$M'_q \approx_{X_1} L'_p + M_1, \quad \forall q \in E \cap V - \{p_1\},\, \forall p \in C \cap V.$$

Por otra parte como los centros de las explosiones son disjuntos en $U \cap V$, los morfismos inducidos

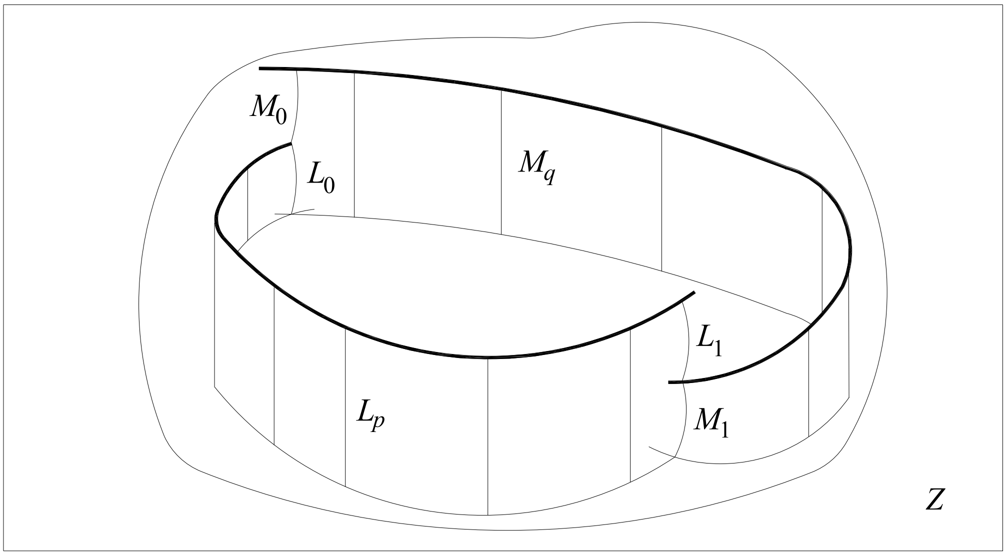
$$\sigma_0^{-1}(U \cap V) \xrightarrow{\sigma_0} U \cap V,\; \sigma_1^{-1}(U \cap V) \xrightarrow{\sigma_1} U \cap V$$

se identifican con la explosión de $U \cap V$ respecto a $(E \cup C) \cap U \cap V$. Es decir, existe un isomorfismo canónico, $\tau$, que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \sigma_0^{-1}(U \cap V) & \xrightarrow{\sigma_0} & U \cap V \\ {\scriptstyle\tau}\big\downarrow & & \big\| \\ \sigma_1^{-1}(U \cap V) & \xrightarrow{\sigma_1} & U \cap V. \end{array}$$

Se tiene así una variedad 3-dimensional $Z$, y un morfismo $\sigma : Z \longrightarrow X$ obtenido pegando $\sigma_0 : X_0 \longrightarrow X - \{p_1\}$ y $\sigma_1 : X_1 \longrightarrow X - \{p_0\}$ mediante el isomorfismo canónico $\tau$. A través de $\tau$ en la variedad construida $Z$ se identifican

$$M'_q \equiv M_q, \quad \forall q \in E \cap U \cap V,$$
$$L'_p \equiv L_p, \quad \forall p \in C \cap U \cap V.$$




Entonces en $Z$ se verifica para todo $q \in E - \{p_0, p_1\}$ y para todo $p \in C - \{p_0, p_1\}$, que

$$L_p \approx_Z M_q + L_0,\ M_q \approx_Z L_p + M_1.$$

Por tanto

$$L_p \approx_Z L_p + M_1 + L_0, \quad \forall p \in C - \{p_0, p_1\}$$

de donde se sigue que

$$M_1 + L_0 \approx_Z 0.$$

A continuación destacaremos una serie de propiedades que posee la variedad construida y que serán de utilidad para la explicación del ejemplo expuesto en la sección 3.3.

PROPIEDAD 1. La variedad $Z$ es completa ya que $X$ es proyectiva y $\sigma : Z \longrightarrow X$ es un morfismo propio. En efecto, para $i \in \{0, 1\}$, cada $\sigma_i : X_i \longrightarrow X - \{p_i\}$ es una composición de explosiones y, por tanto, una composición de morfismos propios ([**Ha1**, Proposition 7.16]) y en particular es un morfismo propio. Como ser propio es local en la base ([**Ha1**, Corollary 4.8]), $\sigma : Z \longrightarrow X$ es un morfismo propio.

PROPIEDAD 2. La variedad $Z$ no es proyectiva. En efecto, en caso contrario, por la Proposición 3.1.16 existiría $D$ un divisor en $Z$ tal que

$$(D \cdot M_1)_Z > 0 \text{ y } (D \cdot L_0)_Z > 0,$$

lo cual es una contradicción con el hecho de que

$$(D \cdot M_1)_Z + (D \cdot L_0)_Z = (D \cdot (M_1 + L_0))_Z = 0.$$

PROPIEDAD 3. La variedad $Z$ es no singular ya que cada uno de los abiertos $X_0$, $X_1$ es no singular (véase [**Ha1**, Theorem 8.24]).

PROPIEDAD 4. Existe una superficie $T$ proyectiva no singular tal que $L_0, M_1 \subset T \subset Z$. Para ello basta tomar $T = \sigma^{-1}(Y)$ y considerar el hecho de que toda variedad completa no singular de dimensión 2 es proyectiva ([**Ha2**, Chapter II, Theorem 4.2]).

PROPIEDAD 5. Como $Z$ es una variedad no singular siempre es posible encontrar un divisor efectivo $H$ que interseque a $M_1$ propiamente. Sea $p \in M_1$ un punto cualquiera y sean $a$ y $b$ las ecuaciones locales de $M_1$ en $p$. Como $Z$ es no singular en $p$, es posible completar $a$, $b$ con una ecuación $c$ hasta conseguir un sistema regular de parámetros de $\mathcal{O}_{Z,p}$. Esta ecuación determina un divisor primo en un entorno de $p$ cuya clausura $H$ en $Z$ proporciona un divisor primo en $Z$ que interseca a $M_1$ propiamente.

## 3.3. Construcción del haz inversible

3.3.1. Sea $Z$ una variedad completa que posee dos curvas racionales $L_0, M_1$ cuya suma es numéricamente equivalente a cero y, por tanto, la variedad $Z$, como ya se ha argumentado, no es proyectiva. Supondremos que las curvas $L_0, M_1$ están contenidas en una superficie proyectiva no singular que llamaremos $T \subset Z$, denotaremos por $j : T \hookrightarrow Z$ este encaje. Además, supondremos que en $Z$ existe un divisor efectivo $H$ que interseca a $M_1$ propiamente. La existencia de una variedad $Z$ verificando todas estas hipótesis ha sido garantizada en la sección anterior.

3.3.2. Sean $p \in L_0, q \in M_1$ dos puntos cerrados. Definimos un nuevo esquema $Z'$ que tiene el mismo espacio topológico subyacente que $Z$ y cuyo haz estructural $\mathcal{O}_{Z'}$ está determinado de la siguiente forma

$$\mathcal{O}_{Z'}(U) = A \ltimes k(p), \text{ si } U = \operatorname{Spec}(A) \subset Z,\ p \in U,\ q \notin U$$
$$\mathcal{O}_{Z'}(V) = B \ltimes k(q), \text{ si } V = \operatorname{Spec}(B) \subset Z,\ p \notin V,\ q \in V$$
$$\mathcal{O}_{Z'}(W) = \mathcal{O}_Z(W), \text{ si } W \subset Z \text{ es un abierto tal que } p,\ q \notin W$$

donde $\ltimes$ denota el producto semidirecto; siendo los morfismos de restricción para $\mathcal{O}_{Z'}$ los inducidos por los morfismos de restricción de $\mathcal{O}_Z$ y las proyecciones canónicas. Es decir, $Z$ y $Z'$ poseen el mismo haz estructural salvo en los puntos $p, q$ donde

$$\mathcal{O}_{Z',p} = \mathcal{O}_{Z,p} \ltimes k(p),\ \mathcal{O}_{Z',q} = \mathcal{O}_{Z,q} \ltimes k(q).$$

Resulta que $Z$ es un subesquema cerrado de $Z'$ ya que $Z = v(\mathfrak{I})$ donde $\mathfrak{I}$ es el haz de ideales nilradical de $\mathcal{O}_{Z'}$. Además, $\mathfrak{I}^2 = 0$. Sea $z : Z \longrightarrow Z'$ el encaje cerrado canónico. Existe una sucesión exacta corta de haces de grupos abelianos en $Z'$

$$0 \longrightarrow \mathfrak{I} \longrightarrow \mathcal{O}^*_{Z'} \longrightarrow z_*\mathcal{O}^*_Z \longrightarrow 0$$

donde la aplicación $\mathfrak{I} \longrightarrow \mathcal{O}^*_{Z'}$ está definida por $a \rightsquigarrow 1 + a$. Por el Teorema 1.4.11 de esta sucesión exacta corta se deduce la siguiente sucesión exacta larga de cohomología

$$\ldots \longrightarrow H^1(Z', \mathfrak{I}) \longrightarrow \operatorname{Pic}(Z') \xrightarrow{z^*} \operatorname{Pic}(Z) \longrightarrow H^2(Z', \mathfrak{I}) \longrightarrow \ldots$$

Como $\mathfrak{I}$ es un haz flasgo, se tiene que $H^1(Z', \mathfrak{I}) = H^2(Z', \mathfrak{I}) = 0$, de donde $\operatorname{Pic}(Z') \overset{z^*}{\approxeq} \operatorname{Pic}(Z)$.

3.3.3. Sea $D'$ un divisor de Cartier en $Z'$. Si $p \in \operatorname{Supp}(D')$, existe $U$ un entorno abierto de $p$ en $Z'$ tal que $D'$ en $U$ viene representado por $f \in \mathcal{K}^*_{Z'}(U)$ con $f_p \notin \mathcal{O}^*_{Z',p}$, lo cual es una contradicción con el hecho de que en $\mathcal{O}_{Z',p}$ todos los no divisores de cero son unidades (es decir, $\mathcal{K}_{Z',p} = \mathcal{O}_{Z',p}$). El mismo argumento se aplica para el punto $q \in Z'$ de modo que el primer homomorfismo vertical del diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc}
\operatorname{Div_C}(Z') & \longrightarrow & \operatorname{ClCa}(Z') & \longrightarrow & \operatorname{Pic}(Z') \\
{\scriptstyle z^\natural}\downarrow & & \downarrow & & {\scriptstyle z^*}\downarrow{\scriptstyle \approxeq} \\
\operatorname{Div_C}(Z) & \longrightarrow & \operatorname{ClCa}(Z) & \xrightarrow{\approxeq} & \operatorname{Pic}(Z)
\end{array}$$

no es sobreyectivo, su imagen es

$$\{D \in \mathrm{Div_C}(Z) \,/\, p, q \notin \mathrm{Supp}(D)\}.$$

Veamos que $H \in \mathrm{Div_C}(Z)$ (véase 3.3.1) no está en la imagen de

$$z^\natural : \mathrm{Div_C}(Z') \longrightarrow \mathrm{Div_C}(Z).$$

Como $H$ es un divisor efectivo que interseca a $M_1$ propiamente resulta que $(H \cdot M_1)_Z > 0$. En efecto, por la Proposición 3.1.13 y el Corolario 3.1.15

$$(H \cdot M_1)_Z = (j^\natural(H) \cdot M_1)_T = i(j^\natural(H) \cdot M_1; T) > 0$$

ya que, al ser $H$ un divisor efectivo que interseca al cerrado $T$ propiamente, $j^\natural(H) \in \mathrm{Div_C}(T)$. Como $M_1 + L_0 \approx_Z 0$, se tiene que

$$(H \cdot M_1)_Z = -(H \cdot L_0)_Z > 0,$$

es decir, $(H \cdot L_0)_Z < 0$. Entonces $L_0 \subset \mathrm{Supp}(H)$ ya que en caso contrario, como $j^\natural(H) \in \mathrm{Div_C}(T)$ se tiene que

$$(H \cdot L_0)_Z = (j^\natural(H) \cdot L_0)_T = i(j^\natural(H) \cdot L_0; T) \geq 0.$$

Por tanto, $p \in \mathrm{Supp}(H)$.

Sea $\mathcal{L} = \mathcal{O}_Z(H)$ y sea $\mathcal{L}'$ el haz inversible en $Z'$ que le corresponde mediante el isomorfismo $\mathrm{Pic}(Z') \xrightarrow{z^*} \mathrm{Pic}(Z)$, es decir,

$$z^*\mathcal{L}' = \mathcal{O}_Z(H).$$

Supongamos que $\mathcal{L}' = \mathcal{O}_{Z'}(H')$ donde $H'$ es un divisor de Cartier en $Z'$. Entonces

$$z^\natural(H') = H''$$

donde $H''$ es un divisor de Cartier en $Z$ tal que $\mathcal{O}_Z(H) \approxeq \mathcal{O}_Z(H'')$, es decir, $H \sim_Z H''$. Se sigue que

$$(H'' \cdot M_1)_Z = (H \cdot M_1)_Z > 0.$$

Y como $p \notin \mathrm{Supp}(H'')$, $H''$ o interseca a $L_0$ propiamente o no lo interseca, con lo cual $H'' \cdot L_0 \geq 0$, y esto es una contradición con el hecho de que

$$(H'' \cdot (M_1 + L_0))_Z = 0.$$

Por tanto, hemos encontrado en $Z'$ un haz inversible, $\mathcal{L}'$, al que no le corresponde ningún divisor de Cartier.

# Bibliografía


[A] Atiyah, M. F.; Macdonald, I. G.: *Introduction to commutative algebra*, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., Reading, Mass., 1969.

[B] Bourbaki, N.: *Commutative algebra, Chapters 1–7.* Elements of Mathematics. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1989.

[E] Eisenbud, D.: *Commutative Algebra with a view toward Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Math. **150**, Springer–Verlag, Heidelberg, 1995.

[EGA I] Grothendieck, A.; Dieudonné, J. A.: *Eléments de Géométrie Algébrique I*, Grundlehren der math. Wissenschaften **166**, Springer–Verlag, Heidelberg, 1971.

[EGA II] Grothendieck, A.; Dieudonné, J. A.: *Eléments de Géométrie Algébrique II, Étude globale élémentaire de quelques classes de morphismes*, Publications Mathématiques, **8**, Institut des Hautes Études Scientifiques, París, 1961.

[EGA $IV_4$] Grothendieck, A.; Dieudonné, J. A.: *Eléments de Géométrie Algébrique IV, Étude locale des schémas et des morphismes de schémas (quatrième partie)*, Publications Mathématiques, **32**, Institut des Hautes Études Scientifiques, París, 1967.

[Ha1] Hartshorne, R.: *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics, No. **52**. Springer-Verlag, New York, 1977.

[Ha2] Hartshorne, R.: *Ample subvarieties of algebraic varieties*, Notes written in collaboration with C. Musili. Lecture Notes in Mathematics, Vol. **156**. Springer-Verlag, Berlin, 1970.

[HS] Hilton, P. J.; Stammbach, U.: *A course in homological algebra*. Second edition, Graduate Texts in Mathematics, **4**. Springer-Verlag, New York, 1997.

[HK] Hübl, R.; Kunz, E.: Regular differential forms and duality for projective morphisms, *J. Reine Angew. Math.* **410** (1990), 84–108

[Ii] Iitaka, S.: *Algebraic Geometry, An Introduction to Birational Geometry of Algebraic Varieties*, Graduate Texts in Math. **76**, Springer–Verlag, Heidelberg, 1982.

[K1] Kleiman, S. L.: Misconceptions about $K_X$, *Enseign. Math.* (2) **25** (1979) pp. 203–206.

[K2] Kleiman, S. L.: Toward a numerical theory of ampleness, *Annals of Math.* **84** (1966), 293-344.

[Ma1] Matsumura, H.: *Commutative algebra*, Second edition, Benjamin/Cummings Publishing Co., Inc., Reading, Massachusetts, 1980.

[Ma2] Matsumura, H.: *Commutative ring theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1986.

[N] Nakai, Y.: Some fundamental lemmas on projective schemes, *Trans. Amer. Math. Soc.* **109** (1963), 296–302.

[S] Shafarevich, I. R.: *Basic algebraic geometry.* 1. Varieties in projective space, 2. Schemes and complex manifolds. Second edition, Translated from the 1988 Russian edition by Miles Reid, Springer-Verlag, Berlin, 1994.